$1^{\text{ère}}$ S Chap. 26 Relations métriques dans le triangle

I. Théorème de Pythagore généralisé (formule du côté ou d'Al-Kashi)

1°) Formule

Dans un triangle ABC quelconque, on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\ AB \times AC \times \cos \widehat{A}$.

2°) Démonstration

$$\begin{aligned} BC^2 &= \overrightarrow{BC}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 \\ &= \left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 \\ &= AB^2 + AC^2 - 2\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \qquad \text{(identité remarquable scalaire)} \\ &= AB^2 + AC^2 - 2\ AB \times AC \times \cos \widehat{A} \end{aligned}$$

3°) Remarque

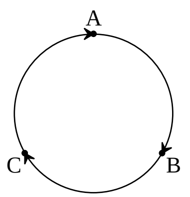
La formule d'Al-Kashi généralise le théorème de Pythagore.

En effet, lorsque le triangle ABC est rectangle en A alors $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$ et $\cos \widehat{A} = 0$.

Donc la relation s'écrit : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

4°) Conséquence

Par **permutation circulaire** des lettres A, B, C



on obtient aussi les relations :

$$CA^2 = BC^2 + BA^2 - 2\ BC \times BA \times \cos \widehat{B}$$
$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2\ CA \times CB \times \cos \widehat{C}$$

II. Aire d'un triangle quelconque

1°) Formule

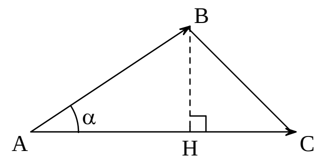
ABC est un triangle quelconque.
On pose $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.
L'aire du triangle ABC est donnée par la formule : $S = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$.

2°) Démonstration

On pose $\widehat{BAC} = \alpha \quad \left(\alpha \in [0\,;\pi]\right)$.

On note H le pied de la hauteur issue de B.

• **1^{er} cas :** $\widehat{A}$ aigu $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

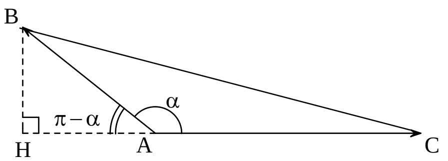


$S = \frac{1}{2} \times AC \times BH$

Or : $BH = c \times \sin \alpha$

Donc $S = \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin \alpha$

• **2^{e} cas :** $\widehat{A}$ obtus $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$



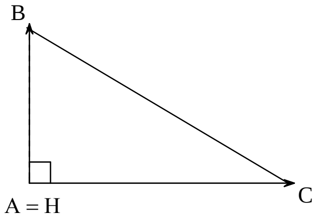
$S = \frac{1}{2} \times AC \times BH$

Or : $BH = c \times \sin(\pi - \alpha)$

$BH = c \times \sin \alpha$

Donc $S = \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin \alpha$

• **3^e cas :** $\widehat{A}$ droit $\left(\alpha = \dfrac{\pi}{2}\right)$

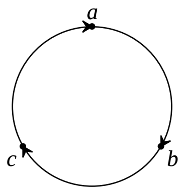


$S = \dfrac{1}{2} bc$

Or $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ donc $\sin \alpha = 1$

$S = \dfrac{1}{2} \times b \times c \times \sin \alpha$

3°) Conséquence



$$\boxed{\begin{array}{l} S = \dfrac{1}{2} bc \sin \widehat{A} \\ S = \dfrac{1}{2} ca \sin \widehat{B} \\ S = \dfrac{1}{2} ab \sin \widehat{C} \end{array}}$$

III. <u>Formule des sinus</u>

1°) Démonstration
(mêmes notations qu'au II)

$$\frac{2S}{abc} = \frac{bc \sin \widehat{A}}{abc} = \frac{ca \sin \widehat{B}}{abc} = \frac{ab \sin \widehat{C}}{abc} \quad : (abc)$$

Donc $\dfrac{2S}{abc} = \dfrac{\sin \widehat{A}}{a} = \dfrac{\sin \widehat{B}}{b} = \dfrac{\sin \widehat{C}}{c}$

2°) Formule des sinus

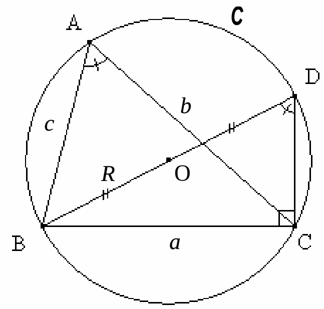
$$\boxed{\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2S}}$$

3°) Lien avec le rayon du cercle circonscrit

ABC est un triangle quelconque.

$\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit à ABC.

On note O son centre et R son rayon.



On note D le point diamétralement opposé à B sur $\mathcal{C}$.

On suppose que $\widehat{A}$ est aigu.
Le triangle BCD est rectangle en C.

$\sin \widehat{BDC} = \dfrac{BC}{BD}$

$= \dfrac{a}{2R}$

Donc $2R \sin \widehat{BDC} = a$ (1)

Or $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ sont deux angles inscrits dans le cercle $\mathcal{C}$ qui interceptent le même arc.

Donc d'après le corollaire du théorème de l'angle inscrit, ils ont la même mesure.
$\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$

(1) s'écrit alors : $2R\sin\widehat{A} = a$.

Finalement :

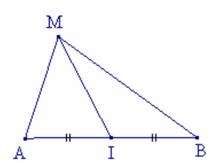
$$\boxed{\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{abc}{2S} = 2R}$$

IV. Théorème de la médiane

1°) Formule de la médiane

A et B sont deux points quelconques de *E*.
I est le milieu de $[AB]$.

$\forall M \in P \quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$



2°) Démonstration (ROC)

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \underbrace{\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right)}_{\vec{0}} \\ &= 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 \end{aligned}$$

3°) Autres formules à savoir (dites aussi parfois aussi « formules de la médiane »)

A et B sont deux points quelconques.
I est le milieu de $[AB]$.

$\forall M \in P \quad MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM}$

Démonstration

$$\begin{aligned} MA^2 - MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \\ &= 2\overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}\right) \\ &= 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} \\ &= \left(-2\overrightarrow{IM}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{AB}\right) \\ &= 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} \end{aligned}$$

A et B sont deux points quelconques.
I est le milieu de $[AB]$.

$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$

Démonstration

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right) \end{aligned}$$

Identité remarquable scalaire

$$\begin{aligned} &= \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 \\ &= MI^2 - \frac{AB^2}{4} \end{aligned}$$

$1^{\text{ère}}$ S **Exercices sur les relations métriques dans un triangle**

1 Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 60°$.
Calculer BC (valeur exacte).

2 Soit ABC un triangle tel que $AB = 5$, $BC = 7$ et $CA = 6$.
Déterminer la valeur arrondie au dixième de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$.

3 Soit ABC un triangle tel que $BC = 9$, $\widehat{ABC} = 65°$ et $\widehat{ACB} = 47°$.
1°) Calculer la valeur arrondie au dixième de AB.
2°) Calculer la valeur arrondie au dixième de AC.

4 Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $BC = 8$ et $CA = 4$.
On note I le milieu de $[AB]$.
Calculer CI (valeur exacte).

5 Soit A et B deux points tels que $AB = 6$.
Déterminer l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$.

Réponses

1 $BC = \sqrt{37}$ (formule d'Al Kashi)

2 On utilise la formule d'Al Kashi.
$\cos \widehat{BAC} = \frac{1}{5}$; $\widehat{BAC} = 78,48...°$ donc $\widehat{BAC} \approx 78,5°$ (valeur arrondie au dixième)

3 On utilise la loi des sinus.
$AB \approx 7,1$ (valeur arrondie au dixième) ; $AC \approx 8,8$ (valeur arrondie au dixième)

4 $CI = \sqrt{31}$ (formule de la médiane)

5 L'ensemble E est le cercle de centre I (milieu de $[AB]$) et de rayon 5.
On utilise une formule de la médiane.

Solution détaillée

$1^{\text{ère}}$ partie : autre expression du premier membre

Soit I le milieu de $[AB]$.

D'après l'une des formules de la médiane,
$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$
Donc $\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 9$

2^{e} partie : chaîne d'équivalences

$M \in E$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$
si et seulement si $MI^2 - 9 = 16$
si et seulement si $MI^2 = 25$
si et seulement si $MI = 5$

3^{e} partie : conclusion ; identification de l'ensemble

L'ensemble E est le cercle de centre I et de rayon 5.

PS dans I et dans IV.

A propos du I.

Il n'y a pas de plus grand côté puisque c'est valable dans n'importe quel triangle.

A propos du II.

Permutation circulaire.

En dessous des 3 égalités de formule d'aire.

Dans toutes les formules il y a les trois lettres.