$1^{\text{ère}}$ L Option

Sens de variations d'une fonction dérivable
Variations de fonctions rationnelles

Objectif du chapitre : étudier quelques exemples de fonctions rationnelles.

I. Exemple 1

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ (fonction inverse)

0 est valeur interdite.

$\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}^*$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Un carré est toujours positif ou nul.
Il n'y a pas de valeurs qui annulent la dérivée.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de – 1		–		–	
Signe de x^2		+	0^{num}	+	
Signe de $f'(x)$		–	‖	–	
Variations de f		↘ –	‖	↘	

N.B. : On descend les doubles barres pour les valeurs interdites jusque sur la dernière ligne.

Phrases :

La fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ et sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Attention : ne pas mettre $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

Comme il y a une valeur interdite, la courbe de f sera en deux parties séparées par une droite.

On ne calcule pas $f(0)$ car $0 \notin \boldsymbol{D}_f$

II. Exemple 2

$f : x \mapsto \dfrac{2x+5}{x+3}$

Il y a une valeur interdite : – 3.

$\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ car c'est une fonction rationnelle.

$$f'(x) = \frac{2(x+3)-1(2x+5)}{(x+3)^2}$$
$$= \frac{1}{(x+3)^2}$$

Un carré est toujours positif ou nul.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signe de 1		+	0	+	
Signe de $(x+3)^2$		+	0	+	
Signe de $f'(x)$		+	‖	+	
Variations de f		↗	‖	↗	

N.B. : On descend les doubles barres pour les valeurs interdites jusque sur la dernière ligne.

Phrases :

La fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-3[$ et sur l'intervalle $]-3\,;+\infty[$.
Attention : ne pas mettre $]-\infty\,;-3[\cup]-3\,;+\infty[$.

Comme il y a une valeur interdite, la courbe de f sera en deux parties séparées par une droite.

On ne calcule pas $f(-3)$ car $-3 \notin \boldsymbol{D}_f$

III. Rappel sur les tableaux de signes pour les quotients

On met 0^{num} et $0^{\text{déno}}$.

- Les 0^{num}, on les met en bas.
- Les $0^{\text{déno}}$ se transforment en doubles barres.

Les doubles barres doivent figurer sur la ligne du signe de la dérivée et sur la ligne des variations de la fonction.

1ère L Option

Exercices sur les variations de de fonctions rationnelles

1 On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$.

1°) Calculer $f'(x)$ (ne pas développer le dénominateur pour la dérivée).

2°) Dresser un tableau récapitulatif comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.

On n'oubliera pas de mettre la double barre.
Faire des phrases pour expliquer le sens de variation de la fonction.

2 On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

1°) Calculer $f'(x)$ puis démontrer que $f'(x)=\dfrac{(1-x)(1+x)}{x^2}$.

N.B. : On peut avoir l'impression que l'on complique l'expression mais en fait on rend plus simple l'étude du signe.

2°) Dresser un tableau récapitulatif comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.

On n'oubliera pas que l'on doit mettre en bas les 0^{num} mais que les $0^{\text{déno}}$ deviennent des doubles barres.
Calculer les extremums locaux.
Faire des phrases pour expliquer le sens de variation de la fonction

3 On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

1°) Calculer $f'(x)$ (présenter le résultat sous la forme d'un quotient avec numérateur et dénominateur factorisés).

2°) Dresser un tableau récapitulatif comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.

Calculer les extremums locaux.
Faire des phrases pour expliquer le sens de variation de la fonction