Prénom : ……………………………………… **Nom :** …………………………………………

$1^{\text{ère}}$ S

Contrôle commun de mathématiques

*

*   *

Lundi 26 janvier 2009

Durée : 3 heures

Le sujet comporte 5 exercices.

La calculatrice graphique est autorisée.

Un effort de rédaction particulier est demandé pour les exercices 3 à 5.

*

*   *

Exercice 1		
Exercice 2		
Exercice 3		
Exercice 4		
Exercice 5		

Note	**Appréciation**
	……………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………… ………………………………………………………………………………

<u>Exercice 1</u> QCM (3 points)

Pour chaque question, quatre réponses sont proposées. Choisir la réponse exacte sans justifier.
On complétera le tableau ci-dessous directement sur cette feuille.
Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point.

1°) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls dans le plan orienté tels que $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=-\dfrac{127\pi}{6}$.

La mesure principale, en radian, de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ est égale à :

a. $-\dfrac{\pi}{6}$	b. $-\dfrac{7\pi}{6}$	c. $\dfrac{5\pi}{6}$	d. $-\dfrac{5\pi}{6}$

Dans les questions 2°) et 3°), on considère dans le plan orienté un losange direct ABCD tel que BD = AD.
On note I le milieu du segment [CD].

2°) La mesure principale, en radian, de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ est égale à :

a. $-\dfrac{\pi}{6}$	b. $-\dfrac{7\pi}{6}$	c. $\dfrac{\pi}{6}$	d. $-\dfrac{5\pi}{6}$

3°) La mesure principale, en radian, de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{CD}\right)$ est égale à :

a. $\dfrac{\pi}{2}$	b. $\dfrac{\pi}{6}$	c. $\dfrac{\pi}{3}$	d. $-\dfrac{\pi}{2}$

4°) L'ensemble des solutions de l'équation $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right]$ est :

a. $S=\left\{\dfrac{2\pi}{3}\,;\dfrac{4\pi}{3}\right\}$	b. $S=\left\{\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{2\pi}{3}\right\}$	c. $S=\left\{-\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{\pi}{3}\right\}$	d. $S=\left\{-\dfrac{2\pi}{3}\,;\dfrac{2\pi}{3}\right\}$

Dans les questions 5°) et 6°), le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

5°) On note A le point de coordonnées cartésiennes $\left(\sqrt{2}\,;-\sqrt{6}\right)$. Un couple de coordonnées polaires de A est :

a. $\left(2\sqrt{2}\,;-\dfrac{\pi}{3}\right)$	b. $\left(2\sqrt{2}\,;-\dfrac{\pi}{6}\right)$	c. $\left(2\sqrt{2}\,;\dfrac{2\pi}{3}\right)$	d. $\left(2\sqrt{2}\,;\dfrac{5\pi}{6}\right)$

6°) On note E et F les points de coordonnées polaires $\left(1\,;\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $\left(1\,;\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Soit G le point défini par $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$. Un couple de coordonnées polaires de G est :

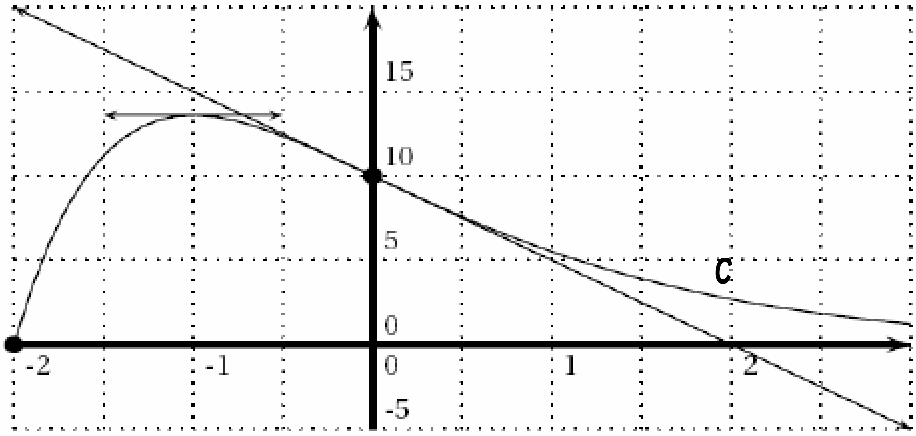
a. $\left(\sqrt{3}\,;\dfrac{\pi}{2}\right)$	b. $(1\,;\pi)$	c. $\left(\sqrt{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right)$	d. $\left(1\,;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Répondre dans le tableau de réponses ci-dessous.

Question	**1°)**	**2°)**	**3°)**	**4°)**	**5°)**	**6°)**	**Total**
Réponse							

<u>Exercice 2</u> (2,5 points)

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$ dont on donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}$ dans le plan muni d'un repère. On note f' la fonction dérivée de f.



La courbe $\mathcal{C}$ vérifie les propriétés suivantes :

- les points marqués sont à coordonnées entières et appartiennent à la courbe tracée ;
- la tangente au point d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses ;
- la tangente au point d'abscisse 0 coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 2.

Pour les questions 1°) et 2°), aucune rédaction n'est demandée.
Compléter directement la colonne de droite du tableau sans justifier.

1°) Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 0.	…………………………………………………
2°) Donner le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$. Faire les flèches de variation à la règle.	

3°) Une des quatre courbes ci-dessous représente graphiquement la fonction f'.
Déterminer celle qui la représente, en justifiant brièvement par une phrase l'élimination de chacune des trois autres courbes.

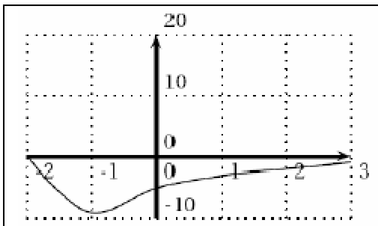


Figure 1

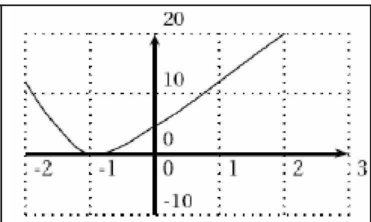


Figure 2

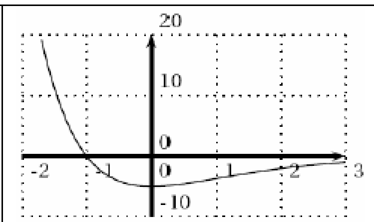


Figure 3

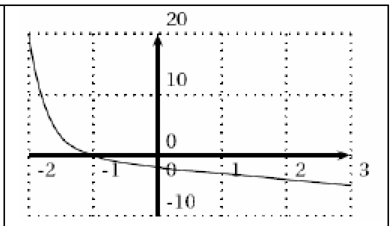


Figure 4

Courbe choisie	………………………………………………………………………
Justification	……………………………………………………………………… ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………

<u>Exercice 3</u> (5 points)

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+3$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

1°) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………...	…………………………………………………………...

2°) Justifier par une phrase que *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ (traits de fraction à la règle).

Etudier les variations de la fonction *f* et dresser son tableau de variation (flèches à la règle).

……….

……….

………

……….

3°) Déterminer une équation de la tangente *D* à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.

……….

……….

4°) a) Démontrer que les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec D vérifient l'équation $x^4 - 8x^2 + 12x - 5 = 0$ (1).

…………………………………………………………	…………………………………………………………
…………………………………………………………	…………………………………………………………
…………………………………………………………	…………………………………………………………
…………………………………………………………	…………………………………………………………

b) Vérifier que pour tout réel x on a : $x^4 - 8x^2 + 12x - 5 = (x-1)^2(x^2 + 2x - 5)$.

…………………………………………………………	…………………………………………………………
…………………………………………………………	…………………………………………………………
…………………………………………………………	…………………………………………………………

c) En déduire les abscisses des points B et C où D recoupe $\mathcal{C}$ $\left(x_B < x_C\right)$.

…………………………………………………………	…………………………………………………………
…………………………………………………………	…………………………………………………………
…………………………………………………………	…………………………………………………………
…………………………………………………………	…………………………………………………………
…………………………………………………………	…………………………………………………………
…………………………………………………………	…………………………………………………………

5°) Déterminer les abscisses des points I, J, K, L où $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses $\left(x_I < x_J < x_K < x_L\right)$.

…………………………………………………………	…………………………………………………………
…………………………………………………………	…………………………………………………………
…………………………………………………………	…………………………………………………………
…………………………………………………………	…………………………………………………………
…………………………………………………………	…………………………………………………………
…………………………………………………………	…………………………………………………………
…………………………………………………………	…………………………………………………………

<u>Exercice 4</u> (6 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\boldsymbol{D} = \mathbb{R} \setminus \{\,0\,;-1\}$ par $f(x)=\dfrac{6x^2+5x+1}{2x^2+2x}$.

1°) Justifier par une phrase que f est dérivable sur tout intervalle de $\boldsymbol{D}$ et vérifier que pour tout $x \in \boldsymbol{D}$, on a :

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{2x^2(x+1)^2}.$$

………

………

………

………

………

………

2°) Dresser le tableau de variations de f (flèches à la règle ; calcul des extremums locaux de f non demandé).

………

………

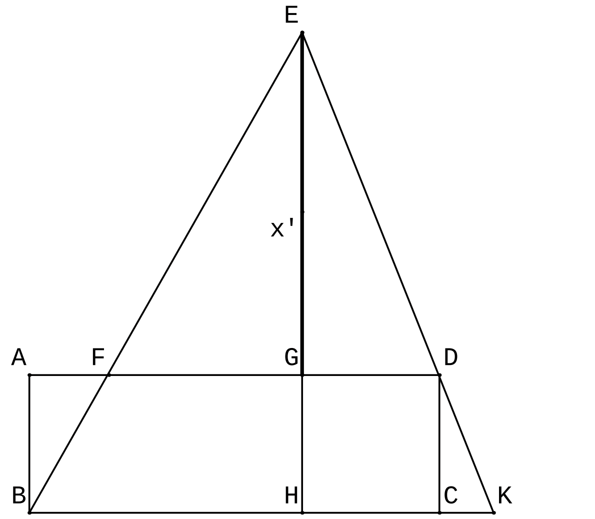
………

………

Partie B

On considère la figure ci-après dans laquelle ABCD est un rectangle tel que AB = 1 et BC = 3.
On note H le point de [BC] tel que BH = 2. La perpendiculaire à (BC) passant par H coupe (AD) en G.
Soit E un point quelconque variable de la droite (GH) tel que G appartienne au segment [HE].
La droite (EB) coupe (AD) en F ; la droite (ED) coupe (BC) en K.
On note x la distance EG. On veut déterminer pour quelle valeur de x l'aire de FBKD est minimale.

1°) Quel est l'ensemble des valeurs possibles de x ?



……………………………………………………..

……………………………………………………..

……………………………………………………..

…………………………………………………….

2°) Exprimer FG et HK en fonction de x.

…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………...	…………………………………………………………...

3°) Démontrer que l'aire du trapèze FBKD est égale à $\dfrac{6x^2+5x+1}{2x^2+2x}$.

Rappel : si on note B et b les longueurs des bases d'un trapèze et h sa hauteur, son aire est égale à $\dfrac{(B+b)\times h}{2}$.

…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………...	…………………………………………………………...
…………………………………………………………...	…………………………………………………………...

4°) En utilisant la partie A, déterminer x pour que cette aire soit minimale. Expliquer clairement.

………

………

<u>Exercice 5</u> pour les 1$^{\text{ères}}$ S1 et S2 (3,5 points)

Soit ABC un triangle quelconque et Δ une droite qui n'est ni confondue avec (AB), ni confondue avec (AC), ni perpendiculaire à (AB), ni perpendiculaire à (AC).
Pour la figure, prendre Δ extérieure au triangle.
On note A', B', C' les projetés orthogonaux respectifs de A, B, C sur la droite Δ.
Soit $\boldsymbol{D}_1$ la droite passant par B' et perpendiculaire à (AC) et $\boldsymbol{D}_2$ la droite passant par C' et perpendiculaire à (AB).
Les droites $\boldsymbol{D}_1$ et $\boldsymbol{D}_2$ se coupent en I.
Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (A'I) et (BC) sont perpendiculaires.
1°) Démontrer que $\overrightarrow{A'I} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'I}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$. On rédigera soigneusement.

…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………...	…………………………………………………………...

2°) Démontrer de même que $\overrightarrow{A'I} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{A'B'}$.

…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………...	…………………………………………………………...

3°) Conclure.

…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..
…………………………………………………………..	…………………………………………………………..

Exercice 5 pour les 1ères S3 (4 points) Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1°) En utilisant les approximations affines, déterminer une valeur approchée de $5{,}001^2$ (on ne cherchera pas à évaluer l'erreur).

……………………………………………………………..	……………………………………………………………..
……………………………………………………………..	……………………………………………………………..
……………………………………………………………..	……………………………………………………………..
……………………………………………………………..	……………………………………………………………..
……………………………………………………………..	……………………………………………………………..

2°) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x}$.

a) Déterminer l'approximation affine de $f(1+h)$ pour h proche de 0.

……………………………………………………………..	……………………………………………………………..
……………………………………………………………..	……………………………………………………………..
……………………………………………………………..	……………………………………………………………..
……………………………………………………………..	……………………………………………………………..
……………………………………………………………..	……………………………………………………………..

b) En déduire une valeur approchée de $f(0{,}97)$ (on ne cherchera pas à évaluer l'erreur).

……………………………………………………………..	……………………………………………………………..
……………………………………………………………..	……………………………………………………………..
……………………………………………………………..	……………………………………………………………..
……………………………………………………………..	……………………………………………………………..
……………………………………………………………..	……………………………………………………………..

$1^{\text{ère}}$ S

Correction du contrôle commun
Lundi 26 janvier 2009

Exercice 1 **(QCM)**

Question	**1°)**	**2°)**	**3°)**	**4°)**	**5°)**	**6°)**	**Total**
Réponse	**c**	**d**	**d**	**d**	**a**	**a**	

Exercice 2

1°) $y = -5x + 10$ (il fallait faire attention aux unités)

2°)

x	-2		-1		3
Variations de f	0	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(3)$

3°) La courbe choisie est celle qui figure sur la courbe sur le graphique 3.

En effet, f est croissante sur l'intervalle $[-2\ ;\ -1]$ donc $f\,'$ est positive ou nulle sur l'intervalle $[-2\ ;\ -1]$;
f est décroissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 3]$ donc $f\,'$ est négative ou nulle sur l'intervalle $[-1\ ;\ 3]$.
Cette première remarque permet d'éliminer les graphiques 1 et 2.
Il reste les graphiques 3 et 4.
Pour choisir entre les deux, on regarde $f\,'(0) = -5$ (coefficient directeur de la tangente).
On élimine ainsi le graphique 4.

Exercice 3

1°) **Démontrons que *f* est paire.**

● L'ensemble de définition de f est égal à $\mathbb{R}$ donc il centré en 0.

●$\forall x \in \mathbb{R}\quad f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - 2(-x)^2 + 3 = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3 = f(x)$.

On en déduit que la fonction f est paire donc comme le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ est orthogonal, on en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

2°) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R}\quad f\,'(x) = \frac{1}{4} \times 4x^3 - 2 \times 2x + 0 = x^3 - 4x = x\left(x^2 - 4\right) = x(x-2)(x+2)$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
SGN de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
SGN de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
SGN de $x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
SGN de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

3°) L'équation réduite de la tangente D à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1 s'écrit :
$y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

Or : $f(1) = \dfrac{5}{4}$ et $f'(1) = -3$

L'équation réduite de D donc $y = -3(x-1) + \dfrac{5}{4}$ soit $y = -3x + \dfrac{17}{4}$.

4°) a) Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec D vérifient l'équation $\dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3 = -3x + \dfrac{17}{4}$ (e).

(e) équivaut successivement à : $\dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3 + 3x - \dfrac{17}{4} = 0$

$x^4 - 4x^2 + 12x - 5 = 0$ (en multipliant par 4 les deux membres et en réduisant).

b) Pour tout réel x, on a : $(x-1)^2(x^2+2x-5) = (x^2-2x+1)(x^2+2x-5)$.

$= x^4 - 4x^2 + 12x - 5$

c) Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec D vérifient l'équation $x^4 - 4x^2 + 12x - 5 = 0$ (1).

D'après la question b), (1) équivaut successivement à :

$(x-1)^2(x^2+2x-5) = 0$

$x - 1 = 0$ ou $x^2 + 2x - 5 = 0$

$x = 1$ ou $x^2 + 2x - 5 = 0$

Considérons le polynôme $x^2 + 2x - 5$.

On utilise le discriminant réduit $\Delta' = 6$.

Le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

$x_1 = -1 - \sqrt{6}$ et $x_2 = -1 + \sqrt{6}$

Les points B et C où D recoupe $\mathcal{C}$ ont pour abscisses $-1-\sqrt{6}$ et $-1+\sqrt{6}$.

5°) Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses vérifient l'équation
$\dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3 = 0$ (2).

On pose $X = x^2$.

(2) s'écrit $\frac{1}{4}X^2 - 2X + 3 = 0$.

Considérons le polynôme …

$X_1 = 2$ et $X_2 = 6$.
Or $X = x^2$ donc (2) équivaut successivement à :

$x^2 = 2$ ou $x^2 = 6$

$x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{6}$ ou $x = -\sqrt{6}$

C coupe l'axe des abscisses aux points I, J, K, L d'abscisses respectives $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$.

<u>Exercice 4</u>

Partie A

f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition.

Pour tout $x \in \boldsymbol{D}$, on a :

$$f'(x) = \frac{(12x+5)(2x^2+2x)-(6x^2+5x+1)(4x+2)}{(2x^2+2x)^2} = ... = \frac{2x^2-4x-2}{(2x^2+2x)^2} = \frac{2(x^2-2x-1)}{4x^2(x+2)^2} = \frac{x^2-2x-1}{2x^2(x+2)^2}.$$

2°) Considérons le polynôme $x^2 - 2x - 1$.
On utilise le discriminant réduit.
(…)

$x_1 = 1-\sqrt{2}$ et $x_2 = 1+\sqrt{2}$

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		0		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
SGN de $2x^2$		+	|	+	|	+	0	+	|	+	
SGN de $(x+1)^2$		+	0	+	|	+	|	+	|	+	
SGN de x^2-2x-1		+	|	+	0	$-$	|	$-$	0	+	
SGN de $f'(x)$		+	||	+	0	$-$	||	$-$	0	+	
Variations de *f*		↗	||	↗	$f(1-\sqrt{2})$	↘	||	↘	$f(1+\sqrt{2})$	↗	

Partie B

1°) L'ensemble de valeurs possibles de x est l'intervalle [0 ; + ∞[.
2°) On applique le théorème de Thalès dans le triangle BEH.

Comme (BH) // (FG), on a : $\dfrac{\text{FG}}{\text{BH}} = \dfrac{x}{\text{EH}}$

On obtient : $\boxed{\text{FG} = \dfrac{2x}{x+1}}$.

On applique le théorème de Thalès dans le triangle EHK.

$\dfrac{x}{\text{EH}} = \dfrac{\text{GD}}{\text{HK}}$

On obtient $\boxed{\text{HK} = \dfrac{x+1}{x}}$.

3°) $$\mathcal{A}_{\text{FBKD}} = \frac{\text{AB} \times (\text{EK} + \text{FD})}{2}$$

$$= \frac{\text{AB} \times (\text{BH} + \text{HK} + \text{FG} + \text{GD})}{2}$$

$$= \frac{1 \times \left(2 + \dfrac{x+1}{x} + \dfrac{2x}{x+1} + 1\right)}{2}$$

$$= \frac{3 + \dfrac{x+1}{x} + \dfrac{2x}{x+1}}{2}$$

$$= \frac{\dfrac{3x(x+1) + (x+1)^2 + 2x^2}{x(x+1)}}{2}$$

$$= \frac{6x^2 + 5x + 1}{2x(x+1)}$$

4°) On observe que $\mathcal{A}_{\text{FBKD}} = f(x)$.

Or d'après le tableau de variation de f établi dans la partie A, le minimum de f sur l'intervalle [0 ; + ∞[est obtenu pour $x = 1 + \sqrt{2}$.

Donc l'aire du trapèze FKBD est minimale pour $x = 1 + \sqrt{2}$.

Exercice 5

1°) Démontrons que $\overrightarrow{A'I} \bullet \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'I}\right) \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'} \bullet \overrightarrow{A'C'}$.

D'après la relation de Chasles, on peut écrire : $\overrightarrow{A'I} \bullet \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'I}\right) \bullet \overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{A'B'} \bullet \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{B'I} \bullet \overrightarrow{AC}$

B' et I appartiennent à $\boldsymbol{D}_1$ donc $\overrightarrow{B'I} \perp \overrightarrow{AC}$.

Par suite, on a : $\overrightarrow{B'I} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$.

On a donc : $\overrightarrow{A'I} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'} \bullet \overrightarrow{AC}$

De plus A' et C' sont les projetés orthogonaux respectifs de A et C sur la droite Δ.

Donc on peut écrire que : $\overrightarrow{A'B'} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'} \bullet \overrightarrow{A'C'}$

Par conséquent, on a : $\overrightarrow{A'I} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'} \bullet \overrightarrow{A'C'}$.

2°) Démontrons que $\overrightarrow{A'I} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'C'} \bullet \overrightarrow{A'B'}$.

D'après la relation de Chasles, on peut écrire : $\overrightarrow{A'I} \bullet \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'I}\right) \bullet \overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{A'C'} \bullet \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{C'I} \bullet \overrightarrow{AB}$

C' et I appartiennent à $\boldsymbol{D}_2$ donc $\overrightarrow{C'I} \perp \overrightarrow{AB}$.

Par suite, on a : $\overrightarrow{C'I} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$.

On a donc : $\overrightarrow{A'I} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'C'} \bullet \overrightarrow{AB}$

De plus A' et B' sont les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur la droite Δ.

Donc on peut écrire que : $\overrightarrow{A'C'} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'C'} \bullet \overrightarrow{A'B'}$

Par conséquent, on a : $\overrightarrow{A'I} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'C'} \bullet \overrightarrow{A'B'}$.

3°) Concluons.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A'I} \bullet \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{A'I} \bullet \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \\
&= \overrightarrow{A'I} \bullet \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'I} \bullet \overrightarrow{AC} \\
&= \overrightarrow{A'I} \bullet \left(-\overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{A'I} \bullet \overrightarrow{AC} \\
&= -\overrightarrow{A'I} \bullet \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'I} \bullet \overrightarrow{AC} \\
&= -\overrightarrow{A'B'} \bullet \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{A'B'} \bullet \overrightarrow{A'C'} \\
&= 0
\end{aligned}$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{A'I}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
Par suite, les droites (A'I) et (BC) sont perpendiculaires.