1ère L Option

Sens de variations d'une fonction dérivable
Variations de fonctions polynômes
du troisième de degré

Objectif du chapitre : étudier quelques exemples de fonctions polynômes du troisième degré en utilisant les dérivées.

I. <u>Exemple 1</u>

$f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme)

$f'(x) = 3x^2 - 3$ (on applique les règles de dérivation des fonctions)

$= 3(x^2 - 1)$ (on factorise par 3)

$= 3(x+1)(x-1)$ (on factorise en utilisant la 3e identité remarquable)

On va étudier le signe de la dérivée en utilisant la dernière forme trouvée ; on se ramène ainsi à l'étude du signe d'un produit.

$3 \neq 0$	$x+1=0$ $x=-1$	$x-1=0$ $x=1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de 3 (ligne facultative)		+		+		+	
Signe de $x+1$		−	0	+		+	
Signe de $x-1$		−		−	0	+	
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
Variations de *f*		↗	3	↘	−1	↗	

Calcul des extremums locaux

Pour calculer le minimum local, on calcule l'image de 1 par *f*.

$f(1) = -1$

Pour calculer le minimum local, on calcule l'image de – 1 par la fonction *f*.

$f(-1) = 3$

Phrases

La fonction *f* est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$ et sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

La fonction *f* est décroissante sur l'intervalle $[-1\,;1]$.

II. <u>Exemple 2</u>

$f : x \mapsto x^3 + 3x + 1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme)

$f'(x) = 3x^2 + 3$

On ne peut pas factoriser cette expression.

Le signe de $f'(x)$ est évident : on a un carré qui est toujours positif ou nul, multiplié par 3 qui donne un nombre positif ou nul.
En ajoutant 3, on obtient un nombre qui est toujours strictement positif.

On peut donc dresser directement le tableau récapitulatif comprenant l'étude du signe de la dérivée et les variations de *f*.

Il n'y a pas de valeur à calculer.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	
Variations de *f*		↗	

1ère L Option

Exercices sur sens de variations de fonctions

Dans les exercices **1** à **3**, calculer $f'(x)$ en utilisant les règles de dérivation et dresser le tableau de variation de *f* ; calculer si nécessaire les extremums.

Faire des phrases pour expliquer le sens de variation de la fonction.

1 $f(x) = -2x^3 + 6x - 3$ (factoriser $f'(x)$)

2 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ (factoriser $f'(x)$)

3 $f(x) = x^3 + x - 1$

4 On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x + 2$ et on note **C** sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique : le centimètre).
1°) Calculer $f'(x)$ en factorisant le résultat et faire le tableau de variation *f*. Calculer les extremums locaux.
Faire des phrases expliquant les variations.
2°) Recopier et compléter le tableau de valeurs :

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$									

3°) Sur un graphique, tracer le repère (O, I, J) en respectant l'échelle indiquée au début de l'exercice.
Placer les points du tableau précédent.
Mettre des pointillés et les valeurs sur les axes pour les points correspondant aux extremums locaux.

Tracer les tangentes horizontales en ces points. On rappelle que l'on représente usuellement une tangente par une double flèche.
4°) Tracer **C** en reliant les points précédents à la main en tenant compte du tableau de variations.
On soignera particulièrement l'allure de la courbe au voisinage des tangentes horizontales.
Contrôler sur la calculatrice graphique.

Corrigé des exercices

1 $f'(x) = -6x^2 + 6 = 6(1-x^2) = 6(1+x)(1-x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		↘	-7	↗	1	↘	

f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$; f est strictement croissante sur l'intervalle $[-1\,;1]$; f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

2 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $3x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		↗	3	↘	-1	↗	

$\boxed{f(0) = 3}$
$f(2) = 2^3 - 3\times 2^2 + 3 = 8 - 12 + 3 = -4 + 3 = -1$

3 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.
$f'(x) = 3x^2 + 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
SGN de $f'(x)$		$+$	
Variations de f		↗	

Il n'y a pas d'extremum.

4 1°) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

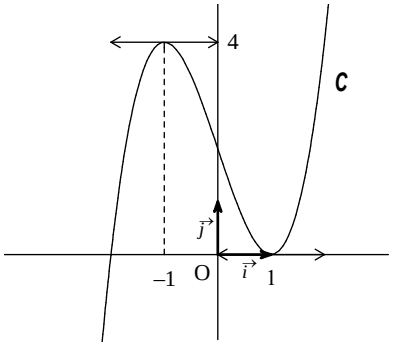
$f'(x) = 3x^2 - 3$
$f'(x) = 3(x^2 - 1)$
$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
SGN de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
SGN de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
SGN de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		↗	4	↘	0	↗	

$f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4$
$f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$

f est croissante sur $]-\infty\,;-1]$ et sur $[1\,;+\infty[$; f est décroissante sur l'intervalle $[-1\,;1]$.

2°)

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$f(x)$	0	3,125	4	3,375	2	0,625	0	0,875	4

$f(-2) = -8 + 6 + 2 = 0$
$f(-1{,}5) = -3{,}375 + 4{,}5 + 2 = -3{,}375 + 6{,}5 = 3{,}125$
$f(-0{,}5) = -0{,}125 + 1{,}5 + 2 = 3{,}375$
$f(0{,}5) = 0{,}125 - 1{,}5 + 2 = 0{,}625$
$f(1{,}5) = 3{,}375 - 4{,}5 + 2 = 0{,}875$
$f(2) = 8 - 6 + 2 = 4$