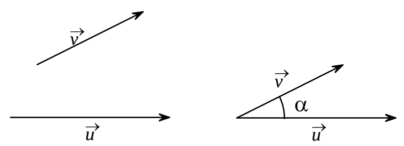
$1^{\text{ère}}$ S Chapitre 24 Le produit scalaire dans le plan

I. Définition et conséquences immédiates

1°) Définition (expression trigonométrique)

Une unité de longueur est fixée dans tout le chapitre.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques du plan.



Le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel noté $\vec{u} \bullet \vec{v}$ (on lit « $\vec{u}$ **scalaire** $\vec{v}$ ») ainsi défini :

1$^{\text{er}}$ cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont <u>non nuls</u>

α est la mesure en radians de l'angle géométrique $\left(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}}\right)$ ($\alpha \in [0\,;\pi]$)

$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha$

2$^{\text{e}}$ cas : l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul

$\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$

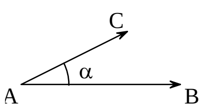
2°) Lien avec la physique : travail d'une force

Par définition, le **travail d'une force** $\vec{F}$ sur un trajet de A à B est donné par $\boxed{W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \vec{F} \bullet \overrightarrow{AB}}$.

Si $\vec{F} \neq \vec{0}$, alors $W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{F}\,;\overrightarrow{AB}}\right)$.

3°) Cas où les vecteurs sont définis par des points

A, B, C sont trois points quelconques tels que $A \neq B$ et $A \neq C$.



$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\alpha$

ou mieux :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}}$$

Application pratique : pour calculer un P.S., on peut toujours se ramener à deux vecteurs ayant la même origine.

4°) Exercice

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\left(\widehat{\vec{u}\ ;\vec{v}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Calculer $\vec{u} \bullet \vec{v}$.

$$\begin{aligned}\vec{u} \bullet \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)\\ &= 4 \times 5 \times \cos\frac{\pi}{3}\\ &= 4 \times 5 \times \frac{1}{2}\\ &= 10\end{aligned}$$

II. Propriétés déduites de la définition

1°) Symétrie du P.S.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.

$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}}$$

Démonstration évidente

$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}}\right)$

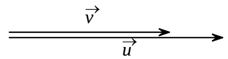
$\vec{v} \bullet \vec{u} = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{v}\ ;\vec{u}}\right)$

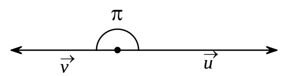
On utilise la propriété de la multiplication des réels et le fait que $\left(\widehat{\vec{v}\ ;\vec{u}}\right) = \left(\widehat{\vec{u}\ ;\vec{v}}\right)$.

2°) P.S. de 2 vecteurs colinéaires

$\vec{u} \bullet \vec{v} =$

- $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires de même sens**
  (car $\left(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}}\right) = 0$ et cos 0 =1)
- $-\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires de sens contraire**
  (car $\left(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}}\right) = \pi$ et cos π = –1)





3°) Signe du P.S.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls quelconques.

$\left(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}}\right)=\alpha$ $(\alpha \in [0\,;\pi])$

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=\underbrace{\|\vec{u}\|}_{>0}\times\underbrace{\|\vec{v}\|}_{>0}\times\cos\alpha$$

Le signe de $\vec{u}\bullet\vec{v}$ est le même que celui de cos α.

α	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos\alpha$		$+$	0	$-$	

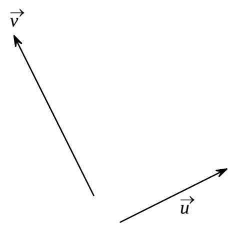
- $\vec{u}\bullet\vec{v}>0$ si et seulement si $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est **aigu**
- $\vec{u}\bullet\vec{v}<0$ si et seulement si $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est **obtus**
- $\vec{u}\bullet\vec{v}=0$ si et seulement si $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est **droit**

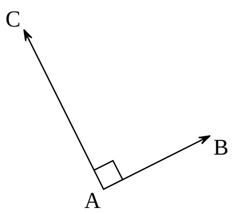
III. <u>Produit scalaire et orthogonalité</u>

1°) Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** (on note $\vec{u}\perp\vec{v}$**)** pour exprimer que :

- soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)=\frac{\pi}{2}$;





- soit $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$

2°) Propriété (déduite de l'étude du signe du produit scalaire)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\bullet\vec{v}=0$.

Emploi de l'adjectif orthogonal

Adjectif qui s'applique à deux droites, deux vecteurs, deux directions.

3°) Erreur à ne pas faire

~~Si $\vec{u}\bullet\vec{v}=0$, alors $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$.~~

P Q

$\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ $\qquad\qquad$ $\vec{u}\bullet\vec{v}=0$

$P\Rightarrow Q$ <u>mais</u> $Q\not\Rightarrow P$

4°) Utilisation

A, B, C, D sont quatre points tels que $A\neq B$ et $C\neq D$.
$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CD}=0$ si et seulement si $(AB)\perp(CD)$.

IV. <u>Carré scalaire d'un vecteur</u>

1°) Définition

$\vec{u}$ est un vecteur quelconque.
On note $\vec{u}^{\,2}=\vec{u}\bullet\vec{u}$.
On dit qu'il s'agit du **carré scalaire** de $\vec{u}$.

2°) Propriété

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $\vec{u}^{\,2}=\|\vec{u}\|^2$.

Attention, contrairement à la physique, on n'écrira pas : $\|\vec{u}\|=u$ ni $\|\vec{u}\|^2=u^2$.
(Le u sans flèche ne signifie rien.)

$$\boxed{\vec{u}^{\,2}=\vec{u}\bullet\vec{u}=\|\vec{u}\|^2}$$

3°) Démonstration

1^er^ cas : $\boxed{\vec{u}\neq\vec{0}}$

$\vec{u}\bullet\vec{u}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos\underbrace{\left(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{u}}\right)}_{0}$

$\qquad=\|\vec{u}\|^2$

2^e^ cas : $\boxed{\vec{u}=\vec{0}}$

$\vec{u}\bullet\vec{u}=0$

$\qquad=\|\vec{u}\|^2$ (car $\|\vec{0}\|=0$)

4°) Cas particulier d'un vecteur défini par deux points

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ (définition)

$= \left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2$

$= AB^2$

$\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = AB$

$$\boxed{\underbrace{\overrightarrow{AB}^2}_{\text{carré scalaire du vecteur}} = \underbrace{\left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2 = AB^2}_{\text{distance au carré (domaine métrique)}}}$$

carré scalaire du vecteur — **distance au carré (domaine métrique)**

V. Expression du produit scalaire à l'aide du projeté orthogonal

1°) Propriété

A, B, C sont trois points quelconques tels que $A \neq C$.
On note H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$.

On garde le point A (« point d'attache ») et on remplace le point B par son projeté orthogonal sur (AC).

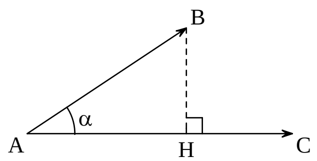
2°) Démonstration

On pose $\widehat{BAC} = \alpha$ ($\alpha \in [0 ; \pi]$).

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\alpha$

$= AB \times \cos\alpha \times AC$

• **1^er^ cas :** $\widehat{BAC}$ aigu

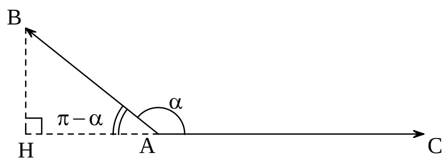


$AH = AB \times \cos\alpha$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AH \times AC$

$= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$ (car $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens)

• **2^e^ cas :** $\widehat{BAC}$ obtus



$AH = AB \times \cos(\pi - \alpha)$

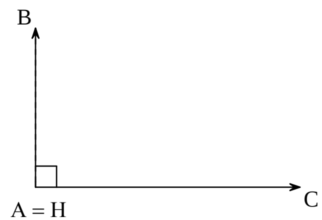
$AH = AB \times (-\cos\alpha)$

$AH = -AB \times \cos\alpha$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AH \times AC$

$= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$ (car $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraires)

• **3^e^ cas :** $\widehat{BAC}$ droit



$\underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0}_{\text{car } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}} = \underbrace{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}}_{\text{car } \overrightarrow{AH} = \vec{0}}$

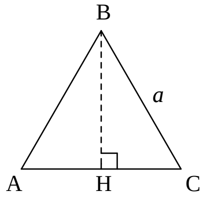
3°) Bilan sur les méthodes de calcul d'un produit scalaire

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} \\ \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

(expression utile quand on ne connaît pas les angles)

4°) Exercice

ABC est un triangle équilatéral de côté *a*.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux manières différentes.



1$^{\text{ère}}$ méthode :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$
$$= a^2 \times \cos \frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{a^2}{2}$$

2$^{\text{e}}$ méthode :

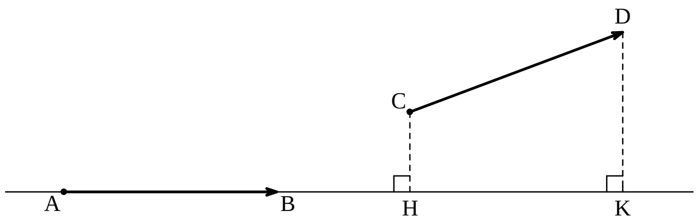
On note H le projeté orthogonal de B sur (AC).
On sait que H est le milieu de [AC].

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$
$= AH \times AC$ (car $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens)
$= \frac{1}{2} AB \times AC$
$= \frac{a^2}{2}$

5°) Généralisation (projection complète)

• Règle

A, B, C, D sont quatre points quelconques de P tels $A \neq B$.
On note H et K les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB).
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HK}$.



On peut remplacer $\overrightarrow{CD}$ par $\overrightarrow{HK}$ dans le scalaire (on ne dit pas que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{HK}$).

• Démonstration

On considère le point L tel que $\overrightarrow{HL} = \overrightarrow{AB}$.
On considère le point E tel que $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{HL} \cdot \overrightarrow{HE}$$
$$= \overrightarrow{HL} \cdot \overrightarrow{HK}$$
$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HK}$$

6°) Mise en garde

Remarque de calcul d'un produit scalaire :

On peut remplacer un vecteur par un autre vecteur qui lui est égal.

Attention, on ne peut pas projeter sur n'importe quelle droite du plan.
On ne peut projeter que sur 2 droites.

Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, projection orthogonale possible sur la droite (AB) et (AC) (mais pas sur une autre droite).

Nous verrons qu'il y a une règle qui dit que $\vec{u} \cdot \left(-\vec{v}\right) = -\vec{u} \cdot \vec{v}$.

VI. Bilinéarité du produit scalaire

1°) Propriétés

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.
k est un réel quelconque.

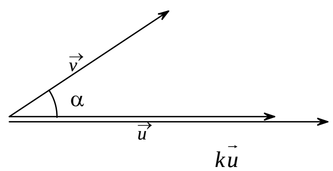
P_1 : $\left(k\vec{u}\right) \cdot \vec{v} = k\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)$
P_2 : $\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

2°) Démonstration de P_1

La propriété est évidente lorsque l'un au moins des deux vecteurs est nul ou (inclusif) $k = 0$.

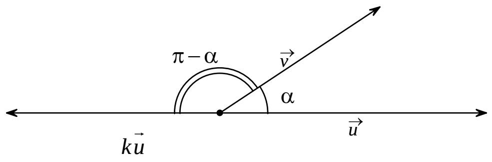
On suppose donc que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et $k \neq 0$.
$\left(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}}\right) = \alpha$ $(\alpha \in [0\ ;\ \pi])$

• 1$^{\text{er}}$ cas : $\boxed{k > 0}$



$$\left(k\vec{u}\right)\bullet\vec{v}=\left\|k\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos\alpha$$
$$=|k|\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos\alpha$$
$$=k\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos\alpha$$
$$=k\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)$$

• **2^e^ cas :** $\boxed{k<0}$

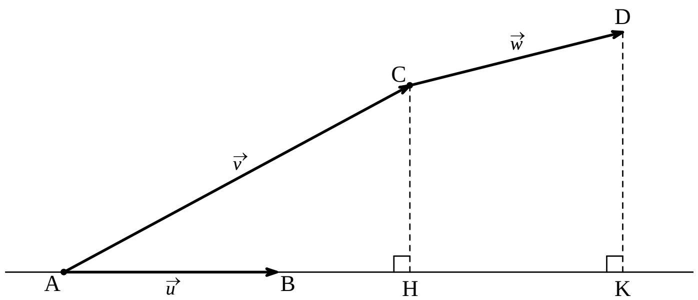


$$\left(k\vec{u}\right)\bullet\vec{v}=\left\|k\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos\left(\pi-\alpha\right)$$
$$=|k|\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos\left(\pi-\alpha\right)$$
$$=\left(-k\right)\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\left(-\cos\alpha\right)$$
$$=k\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos\alpha$$
$$=k\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)$$

2°) Démonstration de P_2

La propriété est évidente lorsque $\vec{u}=\vec{0}$.

On suppose donc que $\vec{u}\neq\vec{0}$.
A et B sont deux points tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.
C est le point tel que $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$.
D est le point tel que $\overrightarrow{CD}=\vec{w}$.
H : projeté orthogonal de C sur (AB).
K : projeté orthogonal de D sur (AB).



Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{HK}=k\,\overrightarrow{AB}$.

$$\vec{u}\bullet\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\overrightarrow{AB}\bullet\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)$$
$$=\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}$$
$$=\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{HK}\quad(1)$$

$$\vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{u}\bullet\vec{w}=\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CD}$$
$$=\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{HK}$$
$$=\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}\bullet\left(k\overrightarrow{AH}\right)$$
$$=\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AH}+k\left(\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AH}\right)\quad\text{d'après } P_1$$
$$=\boxed{(1+k)}\left(\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AH}\right)$$
$$=\overrightarrow{AB}\bullet\left[(1+k)\overrightarrow{AH}\right]$$
$$=\overrightarrow{AB}\bullet\left(\overrightarrow{AH}+\boxed{k\overrightarrow{AH}}\right)$$
$$=\overrightarrow{AB}\bullet\left(\underbrace{\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HK}}\right)$$
$$=\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AK}\quad(2)$$

D'après (1) et (2), on a donc : $\boxed{\vec{u}\bullet\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{u}\bullet\vec{w}}$.

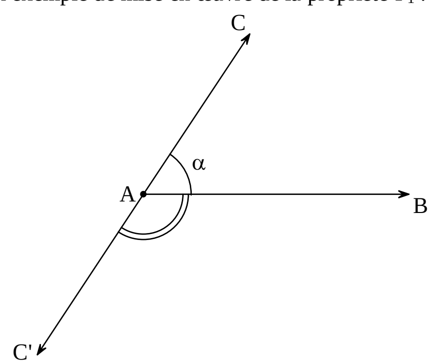
4°) Conséquences de P_1 et P_2

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}\,'$, $\vec{v}\,'$ sont quatre vecteurs quelconques. k et k' sont deux réels quelconques. $\left(k\vec{u}\right)\bullet\left(k'\vec{v}\right)=kk'\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)$ $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\bullet\left(\vec{u}\,'+\vec{v}\,'\right)=\vec{u}\bullet\vec{u}\,'+\vec{u}\bullet\vec{v}\,'+\vec{v}\bullet\vec{u}\,'+\vec{v}\bullet\vec{v}\,'$

5°) Application

• Calculs de produit scalaires par décomposition (voir exercices).

• Un exemple de mise en œuvre de la propriété P_1 : $A\neq B$ et $A\neq C$



$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$

$AB \times AC \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CA}}\right)$

VII. Identités remarquables scalaires

1°) Formules

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ sont deux vecteurs quelconques.

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v}^2$$
$$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v}^2$$
$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right) \bullet \left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

2°) Démonstrations

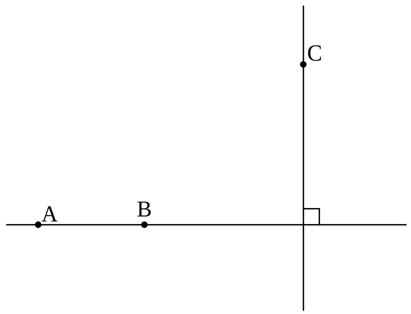
$$\begin{aligned}\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 &= \left(\vec{u}+\vec{v}\right) \bullet \left(\vec{u}+\vec{v}\right)\\ &= \vec{u} \bullet \vec{u} + \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{v} \bullet \vec{v}\\ &= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 &= \left(\vec{u}-\vec{v}\right) \bullet \left(\vec{u}-\vec{v}\right)\\ &= \vec{u} \bullet \vec{u} - \vec{u} \bullet \vec{v} - \vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{v} \bullet \vec{v}\\ &= \vec{u}^2 - 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v}^2\end{aligned}$$

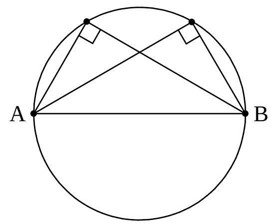
$$\begin{aligned}\left(\vec{u}+\vec{v}\right) \bullet \left(\vec{u}-\vec{v}\right) &= \vec{u} \bullet \vec{u} - \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{u} - \vec{v} \bullet \vec{v}\\ &= \vec{u}^2 - \vec{v}^2\end{aligned}$$

VIII. Lieux géométriques d'orthogonalité

1°) Ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CM} = 0$ où A, B, C sont trois points tels que $A \neq B$:
droite orthogonale à (AB) passant par C.



2°) Ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 0$ où A et B sont deux points tels que $A \neq B$:
cercle de diamètre de diamètre $[AB]$.



3°) Application aux ensembles de points (revoir les barycentres)

A et B fixés (A≠B)

$E = \left\{M \in P \,/\, \left(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \bullet \overrightarrow{MA} = 0\right\}$

1ère partie :

G barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B ; 1).
D'après la relation fondamentale, $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MG}$.

2e partie :

$M \in E$ si et seulement si $\left(3\overrightarrow{MG}\right) \bullet \overrightarrow{MA} = 0$
si et seulement si $\left(3\overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{MA}\right) = 0$
si et seulement si $\overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{MA} = 0$

3e partie :

E est le cercle de diamètre [AB].

IX. Appendice : révision d'une propriété de 4^{e} : triangle rectangle et cercle

1°) Enoncés en « si …, alors … »

Propriété directe

Formulation 1

Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre l'hypoténuse.

Formulation 2

Si ABC est un triangle rectangle en C, alors son cercle circonscrit a pour diamètre [AB].

Formulation 3

Si ABC est un triangle rectangle en C, alors C appartient au cercle de diamètre [AB].

Propriété de l'angle droit dans un cercle.

Formulation 1

A et B sont deux points distincts.

Si C appartient au cercle de diamètre [AB] et est distinct de A et B, alors le triangle ABC est rectangle en A.

Formulation 2

Si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre, alors on obtient un angle droit.

Formulation 3

A et B sont deux points distincts.

Si M est un point du cercle de diamètre [AB] distinct de A et de B, alors l'angle $\widehat{\text{AMB}}$ est droit.

Si M est un point du cercle de diamètre [AB] distinct de A et de B, alors le triangle AMB est rectangle en M.

2°) Création d'un énoncé en « si et seulement si »

Formulation 1

A et B sont deux points distincts.
M est un point distinct de A et B.

- Si M appartient au cercle de diamètre [AB], alors le triangle ABM est rectangle en M.

- Si le triangle ABM est rectangle en M, alors M appartient au cercle de diamètre [AB].

M appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M.

Formulation 2

A et B sont deux points distincts.
M est un point distinct de A et B.

- Si M appartient au cercle de diamètre [AB], alors l'angle $\widehat{\text{AMB}}$ est droit.

- Si l'angle $\widehat{\text{AMB}}$ est droit, alors M appartient au cercle de diamètre [AB].

M appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si l'angle $\widehat{\text{AMB}}$ est droit.

3°) Caractérisation d'un cercle comme ensemble de points

Caractérisation d'un cercle comme lieu géométrique

Lieu des points d'où l'on voit un diamètre sous un angle droit.

Ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\text{MA}} \bullet \overrightarrow{\text{MB}} = 0$ où A et B sont deux points tels que $A \neq B$:
cercle de diamètre de diamètre $[AB]$.