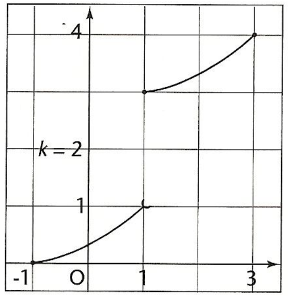
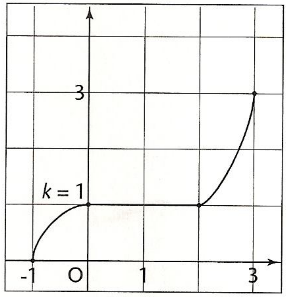
TS # Exercices sur la continuité (2)

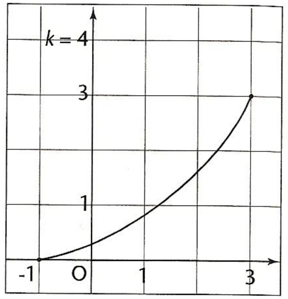
1 Chacune des courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1\ ;3]$.



①



②



③

1°) Par lecture graphique, compléter le tableau suivant par VRAI ou FAUX.

	①	②	③
f est continue sur $[-1\ ;3]$.			
f est strictement croissante sur $[-1\ ;3]$.			
Le réel k est compris entre $f(-1)$ et $f(3)$.			
L'équation $f(x)=k$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-1\ ;3]$.			

2°) Relire le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires du cours et expliquer à l'aide du tableau précédent qu'il est essentiel de vérifier que toutes les hypothèses sont satisfaites pour conclure.

2 Soit f une fonction continue sur l'intervalle $\mathrm{I}=[-1\ ;5]$ telle que $f(-1)=-4$ et $f(5)=3$.

Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans I.
Quelle hypothèse supplémentaire faut-il faire pour que cette solution soit unique ?

3 Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On suppose que $f(-5)=1$; $f(-3)=-2$; $f(0)=1$; $f(2)=4$; $f(5)=-5$; $f(6)=1$.
Recopier et compléter les phrases suivantes :

L'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ admet <u>au moins</u> ….. solution(s) dans $\mathbb{R}$.

L'équation $f(x)=0$ admet <u>au moins</u> ….. solution(s) dans $\mathbb{R}$.

L'équation $f(x)=-4{,}5$ admet <u>au moins</u> ….. solution(s) dans $\mathbb{R}$.

L'équation $f(x)=3$ admet <u>au moins</u> ….. solution(s) dans $\mathbb{R}$.

4 Soit f une fonction continue définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=]-\infty\ ;3[$ admettant le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		3
Variation de f	-4	↗	$+\infty$ ‖

Démontrer, en rédigeant soigneusement, que l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution dans I.
On précisera en particulier $f(\mathrm{I})$.

5 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f	1	↗	2	↘	$-\infty$

Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=0$ (E).

6 On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction $f:x\mapsto x^3-3x$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Déterminer le nombre de solution de l'équation $x^3-3x-1=0$ (E) dans $\mathbb{R}$.

7 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=\left[0\ ;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\cos x-x$.

Le but de cet exercice est d'étudier l'équation $f(x)=0$ (E).
On ne peut pas résoudre cette équation par le calcul.

Partie A Existence et unicité de la solution de (E)

1°) Etudier la continuité de f sur I.
2°) Calculer la dérivée de f ; étudier soigneusement son signe sur l'intervalle I.

En déduire le sens de variation de f sur I et faire le tableau de variation de f sur I. On calculera $f(0)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3°) Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution α dans l'intervalle I.
On précisera en particulier $f(\mathrm{I})$.

Dans le tableau de variation de f établi au 2°), placer α sur la première ligne du tableau.
Placer 0 sur la flèche de variation et « relier » α et 0 par des pointillés.

N. B. : On ne peut pas donner la valeur exacte de α. On va donc chercher un encadrement de α.

Partie B Encadrement de la solution

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de α en utilisant la méthode de balayage.

On sait que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. On souhaite obtenir des encadrements plus précis de α en restreignant à chaque fois l'intervalle.

1°) **Encadrement par deux entiers consécutifs**

Calculer $f(0)$ et $f(1)$ (utiliser la calculatrice en mode). En déduire que l'on a : $0 < \alpha < 1$.

2°) **Encadrement par deux décimaux consécutifs d'ordre 1**

A l'aide de la calculatrice, recopier et compléter le tableau ci-dessous.
On pensera à mettre la calculatrice en mode radians.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x)$ (troncature au centième)											

En déduire un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
On obtient ainsi un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α.

3°) **Encadrement par deux décimaux consécutifs d'ordre 2**

Utiliser le même principe pour obtenir un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.
On obtient ainsi un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

Partie C Utilisation de la calculatrice graphique

A l'aide de la calculatrice, représenter la courbe représentative de la fonction *f* sur l'écran d'une calculatrice graphique. Attention, la fonction est définie sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$; on doit régler la fenêtre graphique.

On observera que la courbe représentative de *f* coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse α.

Utiliser l'option de la calculatrice permettant de préciser une valeur approchée de α.

Compléter l'égalité α = $\boxed{}$, $\boxed{}$ …
On veillera à ne pas écrire la dernière décimale affichée par la calculatrice ; en effet, on ne peut être certain que la dernière décimale soit exacte.

Vérifier que ce résultat est conforme aux encadrements déterminés dans la partie B.

$\boxed{8}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{6}x^3 - 2x - 1$.

1°) Justifier la continuité et la dérivabilité de *f* sur $\mathbb{R}$.

Calculer $f'(x)$.

2°) Etudier les limites de *f* en $+\infty$ et en $-\infty$.

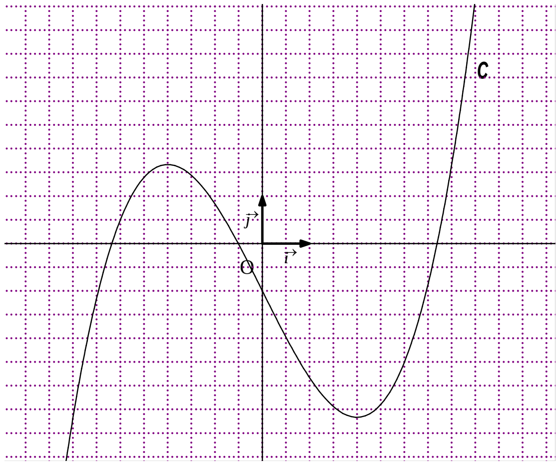
3°) Dresser le tableau de variation de *f* sur $\mathbb{R}$. On indiquera les limites et les extremums de *f* sur $\mathbb{R}$.

4°) On s'intéresse à l'équation $f(x) = 0$ (E). On ne cherchera pas à résoudre (E).

a) Démontrer que l'équation (E) admet trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$ (on ne demande pas de résoudre l'équation).
On sera amené à travailler dans trois intervalles I_1, I_2, I_3.
On note α, β, γ ces trois solutions telles que $\alpha < \beta < \gamma$.
Faire figurer ces trois racines dans le tableau de variation en mettant les 0 sur les flèches des variations ; on utilisera des pointillés.

b) On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Compléter le graphique ci-dessous en traçant les tangentes horizontales, en indiquant sur les axes les coordonnées des points en lesquels la tangente est horizontale et complétant à l'aide de pointillés.

Placer α, β, γ sur le graphique ci-dessous.



A l'aide du graphique, donner un encadrement de α, β, γ par deux entiers consécutifs (donner un encadrement par solution : … < α < …. ; … < β < … ; … < γ < ...).
Justifier ces encadrements par le calcul.

c) Utiliser la calculatrice pour donner des encadrements de α, β, γ d'amplitude 10^{-3}.

$\boxed{9}$ Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x-1}{3}$.

Démontrer que *f* établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de f^{-1}.

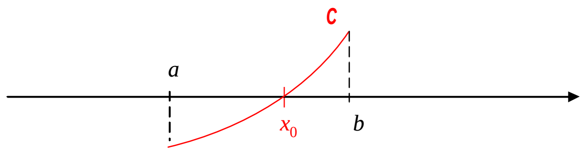
$\boxed{10}$ Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 3x^2 + 1$.

Démontrer que *f* établit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle à préciser et déterminer l'expression de f^{-1}.

11 **Algorithme de dichotomie**

f est la fonction définie et continue sur un intervalle [*a*, *b*] représentée ci-dessous.

On suppose que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle [*a*, *b*].



Entrées
Saisir
a, *b* : bornes de l'intervalle de définition
f : fonction étudiée
N : entier naturel, N $\geqslant$ 1

Traitement
Pour *k* de 1 jusqu'à N
 m prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
 Si *f* (*m*) et *f* (*a*) sont de même signe alors
  a prend la valeur *m*
  sinon
  b prend la valeur *m*
 FinSi
FinPour

Sorties
Afficher *a*, *b*

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle [0, 1] par $f(x)=x^3+2x-2$.
On vérifie aisément que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle [0, 1].

On applique l'algorithme de dichotomie à *f*.

1°) Prendre N = 4 et compléter le tableau suivant.

k		1	2	3	4
m		0,5			
a	0	0,5			
b	1	1			

2°) Traduire cet algorithme dans un langage de programmation et tester le programme obtenu.

Réponses

1 **Tableau**

1°)

	①	②	③
f est continue sur $[-1\,;3]$.	F	V	V
f est strictement croissante sur $[-1\,;3]$.	V	F	V
Le réel *k* est compris entre $f(-1)$ et $f(3)$.	V	V	F
L'équation $f(x)=k$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-1\,;3]$.	F	F	F

2°)

2 Attention, l'hypothèse $f(-1)=-4$ et $f(5)=3$ n'implique nullement que *f* est croissante sur I.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $k\in[-4\,;3]$, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans l'intervalle I.
Or $0\in[-4\,;3]$. Donc l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle I.

Pour que cette solution soit unique, il suffit de supposer que *f* est strictement croissante sur I.

3 On peut faire un graphique (on ne connaît cependant pas l'allure de la courbe entre – 5 et – 3, entre – 3 et 0 etc. Sur l'intervalle [- 5 ; - 3], la fonction *f* n'est pas forcément monotone, ni même strictement monotone. La courbe peut couper plusieurs fois l'axe des abscisses.

On se place intervalle par intervalle.

L'équation $f(x)=\dfrac{1}{2}$ admet **au moins** 4 solutions dans $\mathbb{R}$.

L'équation $f(x)=0$ admet **au moins** 4 solutions dans $\mathbb{R}$.

L'équation $f(x)=-4{,}5$ admet **au moins** 2 solutions dans $\mathbb{R}$.

L'équation $f(x)=3$ admet **au moins** 2 solutions dans $\mathbb{R}$.

N.B. : dans chaque cas, on dit bien « au moins ». Il peut y avoir plus de solutions.

4 Premier travail : on place – 2 comme valeur intermédiaire sur la flèche.

Voir la rédaction spécifique avec le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

❶ *f* est continue sur l'intervalle]–∞ ; 3[

⚠ car *f* n'est pas définie en 3

❷ *f* est strictement croissante* sur]–∞ ; 3[.
❸ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$ et $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=+\infty$
Le corollaire du TVI s'applique.
$f(]-\infty\,;3[)=]-4\,;+\infty[$

$-2 \in \left]-4\,;+\infty\right[$

Donc l'équation $f(x)=-2$ admet une unique racine α <u>dans</u> I.

*On sait que *f* est strictement croissante à cause de la flèche (ce qui d'ailleurs crée une certaine ambiguïté avec le cas d'une fonction seulement croissante).

$\boxed{5}$ Utilisation du tableau de variations pour visualiser.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
Variations de f	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Pas de TVI}} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{On utilise le TVI}}$

Essayer de placer 0 comme valeur intermédiaire sur les flèches. On voit que l'on ne peut le placer qu'à un seul endroit).

On pose : $I_1=\left]-\infty\,;0\right]$ et $I_2=\left[0\,;+\infty\right[$ (on prend les deux intervalles fermés, même si l'on pouvait prendre l'un des intervalles ouvert et l'autre fermé).

Sur l'intervalle I_1, la fonction *f* est minorée par 1, donc l'équation (E) n'admet pas de solution dans cet intervalle.
On peut appliquer le corollaire du TVI (la première partie seulement qui donne l'image de l'intervalle, mais ce n'est pas très utile).

Sur l'intervalle I_2, la fonction *f* est continue et strictement décroissante.
On $f(0)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.
Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique.
$f(I_2)=\left]-\infty\,;2\right]$
$0\in\left]-\infty\,;2\right]$
Donc l'équation (E) admet une unique solution α dans I_3.

Conclusion : L'équation (E) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{6}$ L'équation (E) s'écrit $f(x)=1$ (1[ère] chose à dire pour « relier » l'équation avec *f*).
1[er] travail : essayer de placer 1 comme valeur intermédiaire sur les flèches. On voit que l'on peut placer 1 à 3 endroits.

x	$-\infty$	x_1		-1		x_2		1		x_3		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On pose : $I_1=\left]-\infty\,;-1\right]$; $I_2=\left[-1\,;1\right]$; $I_3=\left[1\,;+\infty\right[$ (on prend les trois intervalles fermés).
On applique le corollaire du TVI sur chacun de ces trois intervalles.

L'équation (E) admet trois solutions dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{7}$ $f(x)=\cos x - x$

Partie A Existence et unicité de la solution de (E)

1°) On pose $u(x)=\cos x$ et $v(x)=x$.

u et *v* sont continues sur I.
Or $f=u-v$ donc *f* est continue sur I.

2°) *u* et *v* sont dérivables sur I.

Or $f=u-v$ donc f est dérivable sur I.

$\forall x\in \mathrm{I} \quad f'(x)=-\sin x-1$

$\forall x\in \mathrm{I} \quad 0\leq \sin x\leq 1$

Donc $\forall x\in \mathrm{I} \quad -1\leq -\sin x\leq 0$
$\forall x\in \mathrm{I} \quad -2\leq -\sin x-1\leq -1$
$\forall x\in \mathrm{I} \quad f'(x)<0$

On en déduit que *f* est strictement décroissante sur I.

N.B. : on peut aussi dire que *u* est strictement décroissante sur I, que *v* est strictement croissante sur I donc que $-v$ est strictement croissante sur I.
Par suite, $u-v$ est strictement décroissante sur I (la somme de deux fonctions strictement décroissante sur un intervalle est strictement décroissante sur cet intervalle).
On en déduit que *f* est strictement décroissante sur I.

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
Signe de $f'(x)$			$-$		
Variation de f	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

$f(0)=1$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$ (on calcule bien les images et non les limites car l'intervalle de départ est fermé).

3°) *f* est continue sur I.
f est strictement décroissante sur I.
On a : $f(0)=1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$.
Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique.
$f(\mathrm{I})=\left[-\frac{\pi}{2}\,;1\right]$ (attention à bien remettre les bornes dans le bon ordre car la fonction *f* est strictement décroissante sur I).
$0\in\left[-\frac{\pi}{2}\,;1\right]$
Donc l'équation (E) admet une unique racine α dans I.

Partie B Encadrement de la solution

1°) $f(0)=1$ et $f(1)=\cos 1-1=-0,459...$ (attention à bien mettre les petits points)

$f(0)>0$ et $f(1)<0$ donc comme *f* est strictement décroissante sur I, on a : $0<\alpha<1$.

2°)

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x)$ (troncature au centième)	1	0,89	0,78	0,65	0,52	0,37	0,22	0,06	–0,10	–0,27	–0,45

On observe à quel moment *f* change de signe. On en déduit que l'on a : $0,7<\alpha<0,8$.

3°)

x	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,77	0,78	0,79	0,8
$f(x)$ (troncature au centième)	0,06	0,05	0,03	0,02	–0,002	–0,02	–0,04	–0,05	–0,07	–0,09	–0,10

On en déduit que l'on a : $0,73<\alpha<0,74$

Partie C Utilisation de la calculatrice graphique

Grâce à la calculatrice graphique, on trouve $\alpha=0,73908513322...$ (attention à bien mettre les petits points)
Le résultat est bien conforme aux encadrements déterminés dans la partie B.

$\boxed{8}$ 1°) *f* est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme (fonction polynôme du troisième degré, incomplète en x^2).

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\frac{1}{2}x^2-2$$

$$f'(x)=\frac{x^2-4}{2}$$

$$f'(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{2}$$

2°) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{6}x^3\right)=-\infty$ (règle du monôme de plus haut degré pour une fonction polynôme non nulle)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{6}x^3\right)=+\infty$

3°) De manière générale, pour étudier les variations d'une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 3, on étudie le signe de la dérivée (il n'y a pas de méthode générale comme pour les fonctions polynômes de degré 2).

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	–	0	+	
Variations de *f*	$-\infty$	↗	$\frac{5}{3}$	↘	$-\frac{11}{3}$	↗	$+\infty$

4°) 1er travail : placer 0 comme VI sur les flèches du tableau de variation.
Une élève (Coline de Gennes a fait quelque chose de bien : elle a repassé en couleur les parties de la courbe suivant le sens de variation de *f*) : il y a trois parties repassées à l'aide de trois couleurs.
On pose : $I_1=]-\infty\,;-2]$; $I_2=[-2\,;2]$; $I_3=[2\,;+\infty[$ (on ne prend que des intervalles fermés).

f est continue sur I_1.
f est strictement croissante sur I_1.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $f(-2)=\frac{5}{3}$ (pour une borne ouverte, on calcule la limite ; pour une borne fermée, on calcule l'image).
Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique.
$f(I_1)=\left]-\infty\,;\frac{5}{3}\right]$
$0\in\left]-\infty\,;\frac{5}{3}\right]$
Donc l'équation (E) admet une unique solution (ou racine*) α dans I_1.

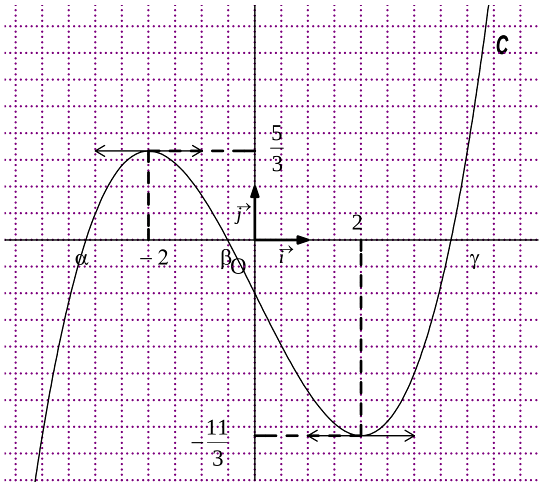
* On peut aussi utiliser le mot « racine » car la fonction *f* est une fonction polynôme.

f est continue sur I_2.
f est strictement décroissante sur I_2.
$f(-2)=\frac{5}{3}$ et $f(2)=-\frac{11}{3}$.
Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique.
$f(I_2)=\left[-\frac{11}{3}\,;\frac{5}{3}\right]$
$0\in\left[-\frac{11}{3}\,;\frac{5}{3}\right]$
Donc l'équation (E) admet une unique solution β dans I_2.

f est continue sur I_3.
f est strictement croissante sur I_3.
$f(2)=-\frac{11}{3}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique.
$f(I_3)=\left[-\frac{11}{3}\,;+\infty\right[$
$0\in\left[-\frac{11}{3}\,;+\infty\right[$
Donc l'équation (E) admet une solution γ dans I_3.

Conclusion : L'équation (E) admet trois solutions distinctes α, β, γ dans $\mathbb{R}$.

N.B. : On peut employer le terme de « racine » car *f* est une fonction polynôme (si *f* n'avait pas été polynomiale, on n'aurait pas pu employer ce terme ; on aurait uniquement employé le mot « solution »).



b) Graphiquement, on trouve : $-4 < \alpha < -3$; $-1 < \beta < 0$; $3 < \gamma < 4$.
On dit que l'on a « isolé » les zéros du polynôme.

On ne peut pas déterminer les valeurs exactes de α, β, γ.
Par le calcul : $f(-4) = -\dfrac{11}{3}$; $f(-3) = \dfrac{1}{2}$; $f(-1) = \dfrac{5}{6}$; $f(0) = -1$; $f(3) = -\dfrac{5}{2}$; $f(4) = \dfrac{5}{3}$.
Ces calculs justifie les encadrements par des entiers α, β, γ.
En effet, $f(-4) < 0$ et $f(-3) > 0$ donc $-4 < \alpha < -3$; $f(-1) > 0$ et $f(0) < 0$ donc $-1 < \beta < 0$;
$f(3) < 0$ et $f(4) > 0$ donc $3 < \gamma < 4$.

On met les pointillés pour les deux axes : axe des abscisses et axe des ordonnées.
On écrit les barres de fraction horizontalement (et non en oblique).

c) En utilisant la méthode de balayage, on obtient :
$-3{,}181 < \alpha < -3{,}180$;
$-0{,}512 < \beta < -0{,}511$;
$3{,}691 < \gamma < 3{,}692$.

(On pourrait aussi procéder par dichotomie.)

Détail du balayage pour α

Encadrement de α d'amplitude 10^{-1} :

On utilise la calculatrice « Table », on règle le pas de la table à 0,1 (ΔTable = 0,1)

x	– 4	– 3,9	– 3,8	– 3,7	– 3,6	– 3,5	– 3,4	– 3,3	– 3,2	– 3,1	– 3
$f(x)$	– 3,667	– 3,087	– 2,545	– 2,042	– 1,576	– 1,146	– 0,7507	– 0,3895	– 0,613	0,23883	0,5

$-3{,}2 < \alpha < -3{,}1$

Encadrement de α d'amplitude 10^{-2} :

x	– 3,2	– 3,19	– 3,18	– 3,17	– 3,16	– 3,15	– 3,14	– 3,13	– 3,12	– 3,11	– 3,1
$f(x)$	– 0,0613	– 0,0303	– 0,00043	0,03083	0,06092	0,09069	0,12014	0,149	0,17	0,20	0,23

$-3{,}19 < \alpha < -3{,}18$

Encadrement de α d'amplitude 10^{-3} :

x	– 3,19	– 3,189	– 3,188	– 3,187	– 3,186	– 3,185	– 3,184	– 3,183	– 3,182	– 3,181	– 3,18
$f(x)$	– 0,03	– 0,027	– 0,024	– 0,021	– 0,018	– 0,014	– 0,011	– 0,008	– 0,005	– 0,002	0,00043

$-3{,}181 < \alpha < -3{,}180$

Détail du balayage pour β

$-1 < \beta < 0$

Encadrement de β d'amplitude 10^{-1} :

x	– 1	– 0,9	– 0,8	– 0,7	– 0,6	– 0,5	– 0,4	– 0,3	– 0,2	– 0,1	0
$f(x)$	0,8	0,6	0,5	0,3	0,1	– 0,02	– 0,21	– 0,40	– 0,60	– 0,80	– 1

$-0{,}6 < \beta < -0{,}5$

Encadrement de β d'amplitude 10^{-2} :

x	– 0,6	– 0,59	– 0,58	– 0,57	– 0,56	– 0,55	– 0,54	– 0,53	– 0,52	– 0,51	– 0,50
$f(x)$	0,16	0,14	0,12	0,10	0,09	0,07	0,05	0,03	0,01	– 0,002	– 0,02

$-0{,}52 < \beta < -0{,}51$

Encadrement de β d'amplitude 10^{-3} :

x	– 0,520	– 0,519	– 0,518	– 0,517	– 0,516	– 0,515	– 0,514	– 0,513	– 0,512	– 0,511	– 0,510
$f(x)$	0,016	0,014	0,012	0,010	0,009	0,007	0,005	0,003	0,001	– 0,00023	–0,0021

$-0,512 < \beta < -0,511$

Détail du balayage pour γ

Encadrement de γ d'amplitude 10^{-1} :

x	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
$f(x)$	– 2,5	– 2,2	– 1,9	– 1,6	– 1,2	– 0,8	– 0,4	0,04	0,54	1,08	1,66

$3,6 < \gamma < 3,7$

Encadrement de γ d'amplitude 10^{-2} :

x	3,6	3,61	3,62	3,63	3,64	3,65	3,66	3,67	3,68	3,69	3,7
$f(x)$	– 0,4	– 0,37	– 0,33	– 0,28	– 0,24	– 0,19	– 0,14	– 0,10	– 0,05	– 0,006	0,04

$3,69 < \gamma < 3,70$

Encadrement de γ d'amplitude 10^{-3} :

x	3,69	3,691	3,692	3,693	3,694	3,695	3,696	3,697	3,698	3,699	3,700
$f(x)$	– 0,006	– 0,001	0,003	0,008	0,013	0,017	0,022	0,027	0,032	0,037	0,042

$3,691 < \gamma < 3,692$

Avec la calculatrice, on obtient :

$\alpha = -3,18014003...$
$\beta = -0,51127743...$
$\gamma = 3,69126777...$
α, β, γ ne sont pas des nombres fractionnaires.

Formules de Cardan : chercher sur Internet.

9 $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{3}$

Solution détaillée :

$D_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}$

f est une fonction affine et $\dfrac{2}{3} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

Le théorème de la bijection s'applique.

f établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$.

D'après le travail sur les limites $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Soit y un réel quelconque.

Cherchons $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$ (1).

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow y = \frac{2x-1}{3} \\
&\Leftrightarrow 3y = 2x-1 \\
&\Leftrightarrow 3y+1 = 2x \\
&\Leftrightarrow x = \frac{3y+1}{2}
\end{aligned}
$$

La bijection réciproque f^{-1} de f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{3}$.

$\boxed{\textbf{10}}$ $f^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{3}}$

Solution détaillée :

$f(x)=3x^2+1$

Soit y un réel quelconque dans l'intervalle $[1\ ;+\infty[$ (cela est dit donc l'énoncé).

Cherchons $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x)=y$ (1).

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow y=3x^2+1 \\
&\Leftrightarrow x^2=\frac{y-1}{3} \\
&\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{y-1}{3}} \text{ ou } x=-\sqrt{\frac{y-1}{3}} \quad \text{(car comme } y \in [1\ ;+\infty[,\ y-1 \geqslant 0\text{).}
\end{aligned}$$

Or $x \in \mathbb{R}_+$ donc $x=\sqrt{\dfrac{y-1}{3}}$.

Donc tout réel $y \in [1\ ;+\infty[$ admet un unique antécédent $x \in \mathbb{R}_+$ par *f*.

f^{-1} est la fonction définie sur $[1\ ;+\infty[$ par $f^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{3}}$.