

1 Soit (u_n) une suite définie sur \mathbb{N} .

Traduire sous la forme d'une phrase quantifiée la propriété « (u_n) converge vers 3 ».

2 On considère une suite (u_n) définie sur \mathbb{N} .

Traduire en termes de limites lorsque c'est possible les propositions suivantes :

- 1°) tout intervalle ouvert contenant 2 contient tous les termes de la suite pour n assez grand.
- 2°) l'intervalle $] - 5,01 ; - 4,99[$ contient tous les termes d'indice $n \geq 1000$.
- 3°) tout intervalle de la forme $] - \infty ; A[$ (où A est un réel) contient tous les termes de la suite pour n assez grand.

3 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = n\sqrt{n}$.

Déterminer un entier naturel N tel que si $n > N$, alors $u_n \in]10^6 ; +\infty[$.

4 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Déterminer un entier naturel N tel que si $n > N$, alors $u_n \in]-10^{-3} ; 10^{-3}[$.

On pourra utiliser l'équivalence : $u_n \in]-10^{-3} ; 10^{-3}[\Leftrightarrow |u_n| < 10^{-3}$.

5 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = 2 + \frac{1}{n^2}$.

Déterminer les entiers naturels n tels que $u_n \in [1,99 ; 2,01]$.

On pourra utiliser l'équivalence : $u_n \in [1,99 ; 2,01] \Leftrightarrow |u_n - 2| \leq 0,01$.

(Revoir la caractérisation d'un intervalle fermé borné par centre et rayon à l'aide de la valeur absolue).

6 Déterminer dans chaque cas la limite de la suite (u_n) .

- 1°) (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$
- 2°) (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{3^n + 4^n}{3^n}$.

7 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{3^n + 4^n}{3^n + 2^n}$.

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

8 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \sin n$.

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

9 Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Donner une expression simplifiée de S_n sous forme factorisée ; en déduire la limite de la suite (S_n) .

10 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n}\right)$.

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

11 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par son premier terme u_0 tel que $0 < u_0 < 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n)^2$ pour tout entier naturel n .

- 1°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < 1$.
 - 2°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
 - 3°) Dédire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.
 - 4°) On note l la limite de (u_n) .
- Justifier que $l < 1$ et que $l = l^2$. En déduire la valeur de l .

12 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ pour tout entier naturel n .

- 1°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 0$.
 - 2°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
 - 3°) Dédire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.
 - 4°) On note l la limite de (u_n) .
- Justifier que $l = l e^{-l}$. En déduire la valeur de l .

13 Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose : $u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ (ou $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$).

- 1°) Calculer u_1, u_2, u_3 .
- 2°) Pour tout entier naturel $k \geq 1$, démontrer l'égalité $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
- 3°) On écrit l'égalité $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ et on fait la somme membre à membre comme dans le cadre ci-dessous :

| | |
|----------------------------|---------------------------------|
| $\frac{1}{1 \times 2}$ | $= \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$ |
| $\frac{1}{2 \times 3}$ | $= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ |
| | |
| $\frac{1}{n \times (n+1)}$ | $= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ |

Recopier ce cadre et barrer en diagonale les termes qui s'annulent dans la somme (méthode par « **télescope** » ou par « **dominos additifs** »).

En déduire que $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

4°) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

14 Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $u_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ (la somme commence pour $k = 2$).

1°) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

2°) Démontrer, que pour tout entier naturel $k \geq 2$, on a $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

3°) On écrit l'inégalité $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ et on fait la somme membre à membre des inégalités obtenues comme dans le cadre ci-dessous (on applique la **règle d'addition des inégalités** : « On peut additionner membre à membre des inégalités de même sens ») :

| |
|---|
| $\frac{1}{2^2} \leq \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$ $\frac{1}{3^2} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ <p style="text-align: center;">.....</p> $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ |
|---|

Recopier ce cadre et barrer en diagonale les termes qui s'annulent (principe des dominos additifs ou télescopage).

En déduire que $u_n \leq 1 - \frac{1}{n}$ et que (u_n) est majorée.

4°) Démontrer à l'aide des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente (on ne demande pas de déterminer la limite).

15 Soit (u_n) et (v_n) les suites définies sur \mathbb{N} par la donnée de leurs premiers termes u_0 et v_0 ($u_0 < v_0$) et les relations de récurrence $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

1°) Démontrer que la suite $(v_n - u_n)$ est géométrique ; donner sa limite.

2°) Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) .

3°) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4°) Démontrer que la suite $(u_n + v_n)$ est constante.

5°) En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n) en fonction de u_0 et v_0 .

16 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

17 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{\ln n}{n}$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

18 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = n^3$.

Déterminer un entier naturel N tel que si $n \geq N$, alors $u_n \geq 2011$.

19 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = n^2$.

Soit A un réel strictement positif fixé.

On cherche un entier naturel N tel que si $n \geq N$, alors $u_n \geq A$.

Parmi les propositions suivantes indiquer celle qui convient :

$N = E(\sqrt{A})$

$N = E(\sqrt{A}) + 1$

$N = E(\sqrt{A}) - 1$

Rappel de notation :

Pour tout réel x , $E(x)$ désigne la partie entière de x (c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x).

20 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = 2^n$.

Soit A un réel strictement positif fixé.

On cherche un entier naturel N tel que si $n \geq N$, alors $u_n \geq A$.

Parmi les propositions suivantes indiquer celle qui convient :

$N = E\left(\frac{\ln A}{\ln 2}\right)$

$N = E\left(\frac{\ln A}{\ln 2}\right) + 1$

$N = E\left(\frac{\ln A}{\ln 2}\right) - 1$

21 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

Déterminer un entier naturel N tel que si $n \geq N$, alors $u_n \in]-10^{-3}; 10^{-3}[$.

22 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

1°) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

2°) Déterminer un entier naturel N tel que si $n > N$, alors $u_n \in]-10^{-2}; 10^{-2}[$.

23 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par son premier terme $u_0 = 7$ et la relation de récurrence

$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ pour tout entier naturel n .

1°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 2$.

2°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

3°) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.

4°) On note l la limite de (u_n) .

Justifier que $l \geq 2$ et que $l = \sqrt{l+2}$. En déduire la valeur de l .

Corrigés

1] On dit que la suite (u_n) converge vers 3 pour exprimer que tout intervalle ouvert I contenant 3 contient tous les termes u_n à partir d'un certain indice.

2] 1°) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ 2°) on ne peut rien dire 3°) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

3] $N = 10^4$

Solution détaillée :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n\sqrt{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Déterminons un entier naturel N tel que si $n > N$, alors $u_n \in]10^6; +\infty[$.

1^{ère} façon : en utilisant la racine cubique d'un réel

$$\begin{aligned} u_n > 10^6 &\Leftrightarrow n\sqrt{n} > 10^6 \\ &\Leftrightarrow n^2 \times n > (10^6)^2 \\ &\Leftrightarrow n^3 > (10^6)^2 \\ &\Leftrightarrow n^3 > 10^{12} \\ &\Leftrightarrow n > \sqrt[3]{10^{12}} \quad * \\ &\Leftrightarrow n > 10^4 \end{aligned}$$

2^e façon : sans utiliser la racine cubique d'un réel

$$\begin{aligned} u_n > 10^6 &\Leftrightarrow n\sqrt{n} > 10^6 \\ &\Leftrightarrow n^2 \times n > (10^6)^2 \\ &\Leftrightarrow n^3 > (10^6)^2 \\ &\Leftrightarrow n^3 > 10^{12} \\ &\Leftrightarrow n^3 > (10^4)^3 \\ &\Leftrightarrow n > 10^4 \quad (\text{car la fonction « cube » est} \\ &\quad \text{strictement croissante sur } \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Donc en posant $N = 10^4$, si $n > N$, alors $u_n \in]10^6; +\infty[$ (autrement dit si $n > 10^4$, alors $u_n \in]10^6; +\infty[$).

Quelques rappels sur la racine cubique d'un réel :

Pour tout réel a positif ou nul (en fait on pourrait prendre a réel*), il existe un unique nombre réel x tel que $x^3 = a$.

Ce réel x est appelé la racine cubique de a et est noté $\sqrt[3]{a}$.

La racine cubique d'un nombre peut se calculer à l'aide de la calculatrice en utilisant un exposant fractionnaire en utilisant l'égalité qui sera justifié plus tard : $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ lorsque $a > 0$.

Les propriétés algébrique de la racine cubique sont les mêmes que celles de la racine carrée.

On démontre que la fonction « racine cubique » est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

La fonction « racine cubique » est la bijection réciproque de la fonction « cube » de $[0; +\infty[$ dans $[0; +\infty[$.

* Pour la racine cubique, on pourrait travailler sur \mathbb{R} (cf. courbe) mais usuellement, au lycée, on travaille plutôt sur \mathbb{R}_+ .

4] $N = 10^2$

Solution détaillée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Rappel :

Soit a un réel strictement positif.

$$\text{On a : } |X| < a \Leftrightarrow -a < X < a.$$

$$\begin{aligned} u_n \in]-10^{-3}; 10^{-3}[&\Leftrightarrow -10^{-3} < u_n < 10^{-3} \\ &\Leftrightarrow |u_n| < 10^{-3} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{1}{n\sqrt{n}} \right| < 10^{-3} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n\sqrt{n}} < 10^{-3} \quad (\text{on a } n > 0 \text{ donc } n\sqrt{n} > 0) \\ &\Leftrightarrow n\sqrt{n} > 10^3 \\ &\Leftrightarrow n^3 > 10^6 \\ &\Leftrightarrow n^3 > (10^2)^3 \\ &\Leftrightarrow n > 10^2 \end{aligned}$$

Donc en posant $N = 10^2$, si $n > N$, alors $u_n \in]-10^{-3}; 10^{-3}[$ (autrement dit si $n > 10^2$, alors $u_n \in]-10^{-3}; 10^{-3}[$).

5] Si $n \geq 10$, alors $u_n \in [1,99; 2,01]$.

Solution détaillée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 2 + \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

$$\begin{aligned}
u_n \in [1,99; 2,01] &\Leftrightarrow 1,99 \leq u_n \leq 2,01 \\
&\Leftrightarrow 2 - 0,01 \leq u_n \leq 2 + 0,01 \\
&\Leftrightarrow -0,01 \leq u_n - 2 \leq 0,01 \\
&\Leftrightarrow |u_n - 2| \leq 0,01 \\
&\Leftrightarrow \left| 2 + \frac{1}{n^2} - 2 \right| \leq 0,01 \\
&\Leftrightarrow \left| \frac{1}{n^2} \right| \leq 0,01 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \leq 0,01 \quad (\text{car } n^2 > 0) \\
&\Leftrightarrow n^2 \geq \frac{1}{0,01} \\
&\Leftrightarrow n^2 \geq 100 \\
&\Leftrightarrow n \geq \sqrt{100} \\
&\Leftrightarrow n \geq 10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_n \in [1,99; 2,01] &\Leftrightarrow 1,99 \leq u_n \leq 2,01 \\
&\Leftrightarrow 1,99 \leq 2 + \frac{1}{n^2} \leq 2,01 \\
&\Leftrightarrow \underbrace{-0,01 \leq \frac{1}{n^2} \leq 0,01}_{\text{toujours vrai}} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \leq 0,01 \\
&\Leftrightarrow n^2 \geq \frac{1}{0,01} \\
&\Leftrightarrow n^2 \geq 100 \\
&\Leftrightarrow n \geq \sqrt{100} \\
&\Leftrightarrow n \geq 10
\end{aligned}$$

Conclusion :

Les entiers naturels n tels que $u_n \in [1,99; 2,01]$ sont tous les entiers naturels supérieurs ou égaux à 10.

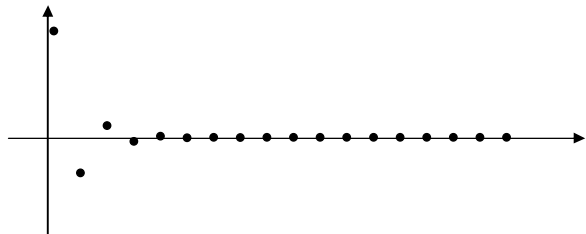
6 On a une F. I. dans chaque cas.
On transforme chaque expression.

$$1^\circ) \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{3^n} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{Or } -1 < -\frac{1}{3} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

On peut observer que la suite (u_n) a un comportement oscillant : les termes d'indice pair sont tous positifs et les termes d'indice impair sont tous négatifs. On a la représentation graphique suivante :



$$2^\circ) \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{3^n + 4^n}{3^n}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, on rencontre une FI du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{3^n + 4^n}{3^n} = \frac{3^n}{3^n} + \frac{4^n}{3^n} = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$\text{Or } \frac{4}{3} > 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty.$$

Par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

7 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (FI, réécriture et limite de suites géométriques)

Solution détaillée :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{3^n + 4^n}{3^n + 2^n} = \frac{3^n \left(1 + \frac{4^n}{3^n}\right)}{3^n \left(1 + \frac{2^n}{3^n}\right)} = \frac{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$\left. \begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \left(\frac{4}{3}\right)^n \right] &= +\infty \quad \text{car } \frac{4}{3} > 1 \\
\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] &= 1 \quad \text{car } -1 < \frac{2}{3} < 1
\end{aligned} \right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Méthode :

On met en facteur les termes prépondérants (c'est-à-dire les termes qui tendent le plus vite vers $+\infty$) au numérateur et au dénominateur (pour les suites, on lève les FI de la même manière que pour les fonctions).

8 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (théorème des gendarmes)

Solution détaillée :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \sin n$$

La suite $(\sin n)$ n'admet pas de limite donc pour déterminer la limite de la suite (u_n) on procède par comparaison (en utilisant le théorème des gendarmes).

$$\text{On a : } \forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq \sin n \leq 1.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad -\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ (car $\left(\frac{3}{4}\right)^n > 0$).

Or $-1 < \frac{3}{4} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

9 $S_n = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right]$ (formule sommatoire pour les suites géométriques ; bien observer cette

formule factorisée) ; $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 3$ car $-1 < \frac{2}{3} < 1$.

Solution détaillée :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n &= 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \quad (\text{somme des termes d'une suite géométrique de raison } \frac{2}{3} \text{ et de premier terme } 1) \\ &= 3 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right] \end{aligned}$$

Or $-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 3$.

10 La limite de la suite (u_n) est égale à $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (composée suite-fonction).

Solution détaillée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n}\right)}_x = \frac{\pi}{4} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin X = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \text{ donc par limite d'une composée suite-fonction, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La suite (u_n) converge vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

11 Étude d'une suite récurrente

$$\begin{cases} 0 < u_0 < 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = (u_n)^2 \end{cases}$$

1°) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $0 < u_n < 1$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

Par hypothèse de définition de la suite, on a $0 < u_0 < 1$.

D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $0 < u_k < 1$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $0 < u_{k+1} < 1$.

On a : $0 < u_k < 1$ (par hypothèse de récurrence)

Donc $0^2 < (u_k)^2 < 1^2$ car la fonction « carré » est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Par suite, $0 < u_{k+1} < 1$.

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k , alors $P(k+1)$ est vraie.

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

On en déduit que pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < 1$.

La suite (u_n) est définie par récurrence.
 On ne dispose pas de l'expression explicite de son terme général.
 Il n'est donc pas possible de démontrer ce résultat autrement qu'en faisant une démonstration par récurrence.

2°) Déterminons le sens de variation de la suite (u_n) .

1^{ère} méthode : méthode par différence (c'est la première méthode à laquelle il faut penser lorsque l'on doit étudier le sens de variation d'une suite)

- On « calcule » la différence $u_{n+1} - u_n$.
- On factorise cette différence puis on fait l'étude du signe (on analyse le signe de la différence). une démonstration par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = (u_n)^2 - u_n \\ = u_n(u_n - 1)$$

Or $0 < u_n < 1$ d'après la question 1°).

Donc $-1 < u_n - 1 < 0$.

Comme $u_n - 1 < 0$ et $u_n > 0$, on peut dire que $u_n(u_n - 1) < 0$ soit $u_{n+1} - u_n < 0$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$.

Conclusion : La suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

2^e méthode :

Soit n un entier naturel fixé.

On a : $u_n < 1$ d'après la question 1°).

Donc en multipliant les deux membres de cette inégalité par u_n ($u_n > 0$ d'après la question 1°), on obtient :

$$(u_n)^2 < u_n.$$

$$\text{Or } u_{n+1} = (u_n)^2.$$

$$\text{Donc } u_{n+1} < u_n.$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$.

Conclusion : La suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

3^e méthode : méthode par quotient (cette méthode par quotient marche très bien ici ; ce n'est cependant pas la méthode à laquelle on doit penser en premier ; en effet, cette méthode nécessite de vérifier d'abord que tous les termes de la suite sont strictement positifs)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(u_n)^2}{u_n} = u_n$$

Or $0 < u_n < 1$ d'après la question 1°).

$$\text{Donc } \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$$

Comme tous les termes de la suite sont strictement positifs d'après la question 1°), on en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

3°) Déduisons-en que la suite (u_n) converge.

Dans la question 1°), on a démontré que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n < 1$ donc la suite (u_n) est minorée par 0.

Dans la question 2°), on a démontré que la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

Or toute suite décroissante minorée converge (théorème du cours).

On en déduit que la suite (u_n) converge.

On ne dit pas que la suite (u_n) converge vers 0. Ce sera le but de la question 4°).

On marque juste que la suite (u_n) converge.

On n'est pas en mesure de préciser la limite : la suite (u_n) peut converger vers un nombre strictement positif.

$$4^\circ) l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

Justifions que $l < 1$ et que $l = l^2$.

On sait que la limite l est un minorant des termes de la suite (car la suite est décroissante).

Donc $l \leq u_0$.

Or $u_0 < 1$ donc $l < 1$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \begin{cases} l & \text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ (la suite } (u_n) \text{ converge vers } l \text{) et les termes de la suite } (u_{n+1}) \text{ sont} \\ & \text{les mêmes que ceux de la suite } (u_n) \text{ à l'exception du premier terme} \\ l^2 & \text{(car } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = (u_n)^2 \text{)} \end{cases}$$

Ce point peut être détaillé ainsi :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l^2$ par propriété d'opération algébrique (limite d'un produit en écrivant $(u_n)^2 = u_n \times u_n$) ou par continuité de la fonction « carré ».

Par unicité de la limite d'une suite (il ne peut y avoir qu'une seule limite), on a : $l = l^2$ (1).

Déduisons-en la valeur de l .

$$(1) \Leftrightarrow l - l^2 = 0 \\ \Leftrightarrow l(1 - l) = 0 \\ \Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } 1 - l = 0 \\ \Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } l = 1$$

Or $l < 1$.

Donc $l = 0$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

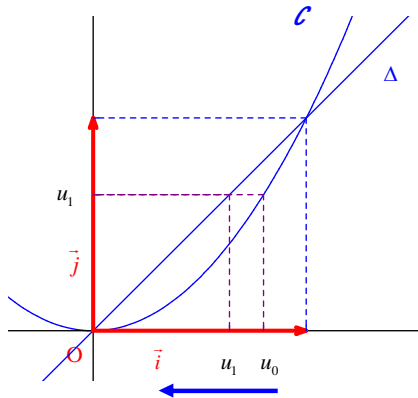
On peut donc dire (u_n) converge vers 0.

Complément :

- On peut représenter les termes de la suite récurrente (procédé habituel).
On visualise graphiquement la convergence de (u_n) vers 0.

On a tracé la courbe \mathcal{C} d'équation $y = x^2$ et la droite Δ d'équation $y = x$.

Représentation graphique



On peut ainsi facilement observer le comportement de la suite (u_n) (monotonie et convergence).

2. Formule explicite du terme général de la suite

On peut commencer par faire une première recherche.

$$u_1 = (u_0)^2$$

$$u_2 = (u_1)^2 = \left[(u_0)^2 \right]^2 = (u_0)^4$$

$$u_3 = (u_0)^2 = \left[(u_0)^4 \right]^2 = (u_0)^8$$

Ainsi, « par déduction », il semble naturel de proposer la formule suivante : $u_n = (u_0)^{(2^n)}$.

Pour démontrer cette conjecture (c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (u_0)^{(2^n)}$), on procède par récurrence.

La formule explicite du terme général permet évidemment de retrouver de manière très simple la convergence de la suite vers 0.

3. 0 est la limite de la suite. C'est un minorant qui n'est jamais atteint et c'est le plus grand de tous les minorants.

12 Étude d'une suite récurrente

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n \times e^{-u_n} \end{cases}$$

1°) **Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n > 0$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
 $u_0 > 0$ par hypothèse donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $u_k > 0$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} > 0$.

On a : $u_k > 0$.
De plus, on a : $e^{-u_k} > 0$.
Donc, par signe d'un produit, $u_{k+1} > 0$.
Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

Par le théorème de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel n , la phrase $P(n)$ est vraie c'est-à-dire que pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 0$.

2°) **Déterminons le sens de variation de la suite (u_n) .**

1^{ère} méthode : Méthode pour étudier le sens de variation de la suite : on étudie le signe de la différence.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = u_n e^{-u_n} - u_n = u_n (e^{-u_n} - 1)$$

On étudie le signe de chacun des deux facteurs du produit.

1^{er} facteur : d'après la question 1°) on sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$.

2^e facteur : on procède par inégalités successives.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N} \quad -u_n < 0 \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N} \quad e^{-u_n} < e^0 \text{ soit } \forall n \in \mathbb{N} \quad e^{-u_n} < 1 \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N} \quad e^{-u_n} - 1 < 0.$$

On obtient donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n < 0$.

Par conséquent, la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

2^e méthode qui marche très bien ici : méthode par quotient car tous les termes de la suite sont strictement positifs

3^o) Déduisons des questions précédentes que la suite (u_n) converge.

D'après la question 1^o), la suite (u_n) est minorée par 0.

D'après la question 2^o), la suite (u_n) est strictement décroissante.

Or toute suite décroissante et minorée converge.

Donc la suite (u_n) converge.

Attention, on ne peut pas dire à ce stade-là qu'elle converge vers 0.

C'est le but de la question 4^o) de trouver la limite de la suite (u_n) .

$$4^{\circ}) l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

Justifions que $l = le^{-l}$.

On sait que l est la limite de la suite (u_n) .

À partir de là, on va exprimer de deux manières différentes la limite de u_{n+1} ce qui va nous permettre de trouver une égalité vérifiée par l .

D'une part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$ de manière évidente (car la suite (u_n) converge vers l donc la suite (u_{n+1}) converge vers la même limite puisqu'elle a les mêmes termes mais décalée de 1).

D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n e^{-u_n}) = le^{-l}$ (car la fonction $f: x \mapsto xe^{-x}$ est continue sur \mathbb{R} donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l) = le^{-l})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \begin{cases} l \\ le^{-l} \quad (\text{car } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n}) \end{cases}$$

Par unicité de la limite d'une suite, $l = le^{-l}$ (1).

Déduisons-en la valeur de l .

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow l - le^{-l} = 0 \\ &\Leftrightarrow l(1 - e^{-l}) = 0 \\ &\Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } 1 = e^{-l} \\ &\Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } \ln 1 = -l \\ &\Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } 0 = -l \\ &\Leftrightarrow l = 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

(u_n) converge vers 0.

13 Étude d'une suite dont le terme générale est défini par une somme

$$u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \quad (n \geq 1)$$

u_n est définie par une sommation : u_n n'est pas la somme des termes d'une SA ni une SG (ni une suite arithmético-géométrique). Il n'y a pas de formule sommatoire.

$$1^{\circ}) u_1 = \sum_{k=1}^{k=1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times (1+1)} = \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \sum_{k=1}^{k=2} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times (1+1)} + \frac{1}{2 \times (2+1)} = \frac{2}{3}$$

$$u_3 = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times (1+1)} + \frac{1}{2 \times (2+1)} + \frac{1}{3 \times (3+1)} = \frac{3}{4}$$

Remarque :

$$u_2 = u_1 + \frac{1}{2 \times (2+1)} = \frac{2}{3}; \quad u_3 = u_2 + \frac{1}{3 \times (3+1)} = \frac{3}{4} \text{ etc.}$$

Attention à ne pas commettre la faute qui consiste à écrire : $u_3 = \underbrace{u_1}_{\text{erreur}} + u_2 + \frac{1}{3 \times 4}$.

$$2^{\circ}) \text{ Pour tout entier naturel } k \geq 1, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \frac{\cancel{k+1}}{k \cancel{(k+1)}} - \frac{\cancel{k}}{\cancel{k}(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

3^o)

Cas particulier pour $n = 2$:

$$\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$u_2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

Dans le cas général,

| | |
|--|---------|
| $\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$ | $k = 1$ |
| $\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ | $k = 2$ |
| | |
| $\frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ | $k = n$ |

Quand on additionne membre à membre toutes ces inégalités, tous les membres de gauche forment une somme qui est égale à la somme qui définit u_n (grâce à l'expression de u_n).

Ce ne sont pas de égalités séparées mais des égalités qu'on va toutes additionner membre à membre.

Les pointillés sont là pour signifier que l'on n'a pas écrit toutes les égalités (on ne peut pas puisque l'on n'a pas la valeur de n).

Pour écrire une somme en extension, on est obligé d'utiliser des pointillés.

Si on continue, on observe un principe d'annulation des termes d'une égalité avec la suivante (le 2^e terme d'une égalité s'annule toujours avec le 1^{er} du suivant). Ce qui permet de bien comprendre le principe des dominos additifs.

Quand on additionne les membres de droite, il y a des termes qui s'annulent deux à deux.

On ne rédige pas vraiment.

On écrit : $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

On obtient ainsi une formule sommatoire (on a défini u_n de manière explicite en fonction de n).

4°) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. On peut donc dire que la suite (u_n) converge vers 1.

Commentaire :

On a une espèce de passage de l'infini au fini au sens où l'on a une somme infinie de termes qui converge vers une limite finie.

14 $u_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} \quad (n \geq 2)$

1°) **Sens de variation de la suite (u_n)**

On procède par différence.

$$\forall n \geq 2 \quad u_{n+1} - u_n = \sum_{k=2}^{k=n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} = \left(\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right) - \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Tous les termes de la 2^e somme se retrouve dans la 1^{ère} somme donc les termes s'annulent.

Or $\forall n \geq 2 \quad \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ d'où $\forall n \geq 2 \quad u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 2.

2°) Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k - (k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$$

Or $k-1 \leq k$ d'où $k(k-1) \leq k^2$.

Donc comme les deux membres sont strictement positifs, par passage à l'inverse, on obtient : $\frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}$ d'où

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

3°)

| |
|--|
| $\frac{1}{2^2} \leq \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$ |
| $\frac{1}{3^2} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ |
| |
| $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ |

Donc $u_n \leq 1 - \frac{1}{n}$.

Or $\forall n \geq 2 \quad -\frac{1}{n} < 0$ d'où $\forall n \geq 2 \quad u_n \leq 1$.

Donc (u_n) est majorée par 1.

4°) Théorème sur les suites croissantes majorées (à citer : « Toute suite croissante majorée converge »).

La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge vers une limite l .

On peut dire $l \leq 1$.

Remarque :

On peut démontrer par diverses méthodes que cette limite est égale à $\frac{\pi^2}{6} - 1$, résultat qui ne manque pas de surprendre au premier abord.

15 Étude de deux suites imbriquées

Il faut remarquer que $(u_n + v_n)$ et $(v_n - u_n)$ sont bien des suites.

1°)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{2u_n + v_n}{3} = \frac{1}{3}(v_n - u_n)$$

Donc la suite $(v_n - u_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

$$\text{Par conséquent : } \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n - u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (v_0 - u_0)$$

$$\text{Or } -1 < \frac{1}{3} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

2°) La suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.

Détail de la démarche :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n \\ &= \frac{v_n - u_n}{3} \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n (v_0 - u_0) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} (v_0 - u_0) \end{aligned}$$

$$\text{Or } u_0 < v_0 \text{ donc } v_0 - u_0 > 0$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0.$$

D'où (u_n) est croissante à partir de l'indice 0.

Même raisonnement pour (v_n) :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n + 2v_n}{3} - v_n \\ &= \frac{u_n - v_n}{3} \\ &= \frac{1}{3}(u_n - v_n) \\ &= -\frac{1}{3}(v_n - u_n) \\ &= -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n (v_0 - u_0) \\ &= -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} (v_0 - u_0) \end{aligned}$$

$$\text{Or } u_0 < v_0 \text{ donc } v_0 - u_0 > 0$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - v_n < 0.$$

D'où (v_n) est décroissante à partir de l'indice 0.

3°) (u_n) est croissante*.

(v_n) est décroissante.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

* Pour des suites adjacentes, la stricte monotonie n'a pas d'intérêt, ce qui explique qu'on ne dise pas que (u_n) est strictement croissante ni que (v_n) est strictement décroissante.

4°) Démontrons que la suite $(u_n + v_n)$ est constante.

Méthode : Pour démontrer qu'une suite (w_n) est constante, on démontre que $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} = w_n$ ou encore que $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} - w_n = 0$.

On démontre que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} + v_{n+1} &= \frac{u_n + 2v_n}{3} + \frac{v_n + 2u_n}{3} \\ &= \frac{3u_n + 3v_n}{3} \\ &= u_n + v_n \end{aligned}$$

5°) Comme la suite $(u_n + v_n)$ est constante, $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n + v_n = u_0 + v_0$.

Méthode : On pourrait tout aussi bien écrire $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n + v_n = u_1 + v_1$ (ou $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n + v_n = u_2 + v_2 \dots$).
Simplement, u_0 et v_0 font partie des données initiales des suites.
On peut le faire avec n'importe quoi, mais il est plus naturel de le faire avec u_0 et v_0 .

On sait que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Par conséquent, elles convergent vers la même limite.

Soit l la limite commune aux deux suites.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 2l.$$

Or la suite $(u_n + v_n)$ est constante (tous les termes sont égaux à $u_0 + v_0$) donc $2l = u_0 + v_0$ d'où $l = \frac{u_0 + v_0}{2}$.

La limite commune des suites (u_n) et (v_n) est égale à $\frac{u_0 + v_0}{2}$.

16 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (technique de la quantité conjuguée).

Solution détaillée :

On rencontre une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \times (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \times 1} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) = +\infty$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Étude d'une solution erronée :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n} \times \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n} \times \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} &= +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ donc on rencontre une forme indéterminée du type « } 0 \times \infty \text{ ».}$$

Si on met n en facteur, on « retombe » sur une F.I. du type « $0 \times \infty$ ».

Variante de cette solution erronée :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} - \sqrt{n^2 \times \frac{1}{n}} \\ &= \sqrt{n^2} \times \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{n^2} \times \sqrt{\frac{1}{n}} \\ &= |n| \times \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - |n| \times \sqrt{\frac{1}{n}} \\ &= n \times \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - n \times \sqrt{\frac{1}{n}} \\ &= n \times \left(\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{\frac{1}{n}} \right) \end{aligned}$$

Remarque :

On peut écrire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$ mais le $+$ ne présente pas d'intérêt.

$$\text{17} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{\ln n}{n}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (limite de référence croissance comparée pour les fonctions : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$).

18 $\sqrt[3]{2011} = 12,6222\dots$ (petits points indispensables, on écrit le début de l'écriture décimale de $\sqrt[3]{2011}$; toutes les décimales écrites sont justes).

On choisit $N=13$.

Solution détaillée :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Déterminons un entier naturel N tel que si $n \geq N$, alors $u_n \geq 2011$.

$$\begin{aligned} u_n \geq 2011 &\Leftrightarrow n^3 \geq 2011 \\ &\Leftrightarrow n \geq \sqrt[3]{2011} \end{aligned}$$

D'après la calculatrice, on a : $\sqrt[3]{2011} = 12,6222\dots$ (petits points indispensables, on écrit le début de l'écriture décimale de $\sqrt[3]{2011}$; toutes les décimales écrites sont justes).

Pour calculer $\sqrt[3]{2\,011} = 12,6222\dots$, il y a plusieurs possibilités :

- on va dans MATH puis on utilise la « fonction » permettant de calculer la racine cubique d'un nombre.
- on tape : $2011^{(1/3)}$ (ne pas oublier les parenthèses).

On choisit $N=13$.

Donc si $n \geq 13$, alors $u_n \geq 2011$.

u_n ne sera jamais égal à 2011 mais ce n'est pas grave.

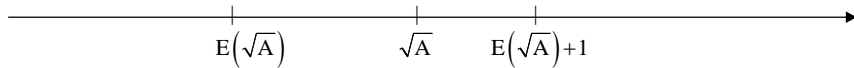
$$\boxed{19} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$u_n \geq A \Leftrightarrow n^2 \geq A$$

$$\Leftrightarrow n \geq \sqrt{A}$$

On fait un schéma.



On pose $N = E(\sqrt{A})+1$.

Remarques :

- On prend la partie entière car \sqrt{A} n'est pas forcément un entier.
- Si \sqrt{A} est un entier, $N = E(\sqrt{A})$.

Si $n \geq N$, alors $u_n \geq A$.

On peut aussi écrire : $N = E(\sqrt{A}+1)$ (en effet, pour tout réel x , on a : $E(x+1) = E(x)+1$).

Exemple :

Prenons $A = 1000$.

D'après la calculatrice, on a : $\sqrt[3]{1000} = 10$
Donc $N = 32$.

$$\boxed{20} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$A > 0$ fixé

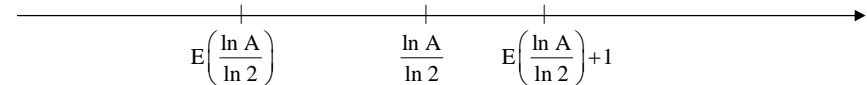
$$u_n \geq A \Leftrightarrow 2^n \geq A$$

$$\Leftrightarrow \ln 2^n \geq \ln A$$

$$\Leftrightarrow n \ln 2 \geq \ln A$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln A}{\ln 2} \quad (\text{pas de changement de sens dans l'inégalité car } \ln 2 > 0)$$

On fait un axe.



Remarque :

Si $\frac{\ln A}{\ln 2}$ est un entier c'est-à-dire si A est de la forme 2^p avec p entier naturel, l'entier $N = E\left(\frac{\ln A}{\ln 2}\right) = \frac{\ln A}{\ln 2}$ convient.

Le résultat précédent ($N = E\left(\frac{\ln A}{\ln 2}\right)+1$) est encore valable mais N ne sera pas le plus petit entier naturel.

On pose $N = E\left(\frac{\ln A}{\ln 2}\right)+1$.

Si $n \geq N$, alors $u_n \geq A$.

$$\boxed{21} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Cherchons un entier naturel N tel que si $n \geq N$, alors $u_n \in]-10^{-3}; 10^{-3}[$.

$$\begin{aligned} u_n \in]-10^{-3}; 10^{-3}[&\Leftrightarrow |u_n| < 10^{-3} \\ &\Leftrightarrow \left| \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right| < 10^{-3} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n < 10^{-3} \quad * \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{3}\right)^n < \ln 10^{-3} \\ &\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{3}\right) < -3 \ln 10 \\ &\Leftrightarrow -n \ln 3 < -3 \ln 10 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{-3 \ln 10}{-\ln 3} \\ &\Leftrightarrow n > \frac{3 \ln 10}{\ln 3} \end{aligned}$$

D'après la calculatrice, $\frac{3 \ln 10}{\ln 3} = 6,28770\dots$

Si $n \geq 7$, alors $u_n \in]-10^{-3}; 10^{-3}[$.

* On utilise la propriété suivante de la valeur absolue à connaître :

| |
|---|
| $\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a^n = a ^n$ |
|---|

$$\boxed{22} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

1°) Déterminons la limite de la suite (u_n) .

■ On applique le théorème des gendarmes.
 ■ On procède ainsi car la suite $((-1)^n)$ n'a pas de limite.

La suite $((-1)^n)$ est bornée entre -1 et 1 .

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad -\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

La suite (u_n) converge vers 0 .

2°) Déterminons un entier naturel N tel que si $n > N$, alors $u_n \in]-10^{-2}; 10^{-2}[$.

$$\begin{aligned} u_n \in]-10^{-2}; 10^{-2}[&\Leftrightarrow |u_n| < 10^{-2} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| < 10^{-2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} < 10^{-2} \\ &\Leftrightarrow n > \frac{1}{10^{-2}} \\ &\Leftrightarrow n > 10^2 \\ &\Leftrightarrow n > 100 \end{aligned}$$

On peut donc prendre $N = 100$.

Si $n > 100$, alors $u_n \in]-10^{-2}; 10^{-2}[$.

23 Étude d'une suite récurrente

$$(u_n) \begin{cases} u_0 = 7 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

1°) **Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 2$.**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n > 2$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

$u_0 = 7$ par hypothèse d'où $u_0 > 2$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $u_k > 2$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} > 2$.

On a : $u_k > 2$.

Donc $u_k + 2 > 4$

D'où $\sqrt{u_k + 2} > 2$

soit $u_{k+1} > 2$.

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

Par le théorème de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel n , la phrase $P(n)$ est vraie c'est-à-dire que pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 2$.

2°) **Déterminons le sens de variation de la suite (u_n) .**

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n + 2} - u_n \\ &= \frac{(\sqrt{u_n + 2} - u_n)(\sqrt{u_n + 2} + u_n)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} \\ &= \frac{u_n + 2 - (u_n)^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} \\ &= \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} \quad (\text{factorisation du polynôme } x + 2 - x^2 \text{ évidente à l'aide des racines } -1 \\ &\quad \text{et } 2) \end{aligned}$$

On utilise le résultat de la question 1°) : $u_n > 2$.

$$\text{On a donc } \begin{cases} 2 - u_n < 0 \\ u_n + 1 > 0 \\ \sqrt{u_n + 2} + u_n > 0 \end{cases}$$

D'où $u_{n+1} - u_n < 0$ (règle des signes d'un quotient).

On en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

3°) **Déduisons des questions précédentes que la suite (u_n) converge.**

D'après la question 1°), la suite (u_n) est minorée par 2.

D'après la question 2°), la suite (u_n) est strictement décroissante.

Or toute suite décroissante et minorée converge.

Donc la suite (u_n) converge.

Attention, on ne peut pas dire à ce stade-là qu'elle converge vers 2.

C'est le but de la question 4°) de trouver la limite de la suite (u_n) .

$$4^\circ) \quad l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

Justifions que $l \geq 2$.

On sait que la limite d'une suite décroissante est un minorant de la suite et que c'est le plus grand des minorants.

On sait que 2 est un minorant de la suite donc 2 est plus grande que 2 soit $l \geq 2$.

Justifions que $l = \sqrt{l+2}$.

On sait que l est la limite de la suite (u_n) .

À partir de là, on va exprimer de deux manières différentes la limite de u_{n+1} ce qui va nous permettre de trouver une égalité vérifiée par l .

D'une part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$ de manière évidente (car la suite (u_n) converge vers l donc la suite (u_{n+1}) converge vers la même limite puisqu'elle a les mêmes termes mais décalée de 1).

D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n + 2} = \sqrt{l+2}$ (car la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x+2}$ est continue sur son ensemble de définition donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l) = \sqrt{l+2}$)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \begin{cases} l \\ \sqrt{l+2} \end{cases}$$

Par unicité de la limite d'une suite, $l = \sqrt{l+2}$ (1).

Déduisons-en la valeur de l .

$$\begin{aligned}(1) &\Rightarrow l^2 = l + 2 \\ &\Rightarrow l^2 - l - 2 = 0 \\ &\Rightarrow l = -1 \text{ ou } l = 2\end{aligned}$$

Comme $l \geq 2$, on en déduit que $l = 2$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

(u_n) converge vers 2.