# 1ère L Option

# Sens de variations d'une fonction dérivable
# Variations de fonctions polynômes
# du second degré

## I. Lien entre signe de la dérivée et sens de variation

**1°) Principe de LAGRANGE (admis sans démonstration)**

**LAGRANGE : mathématicien français (1736-1813)**

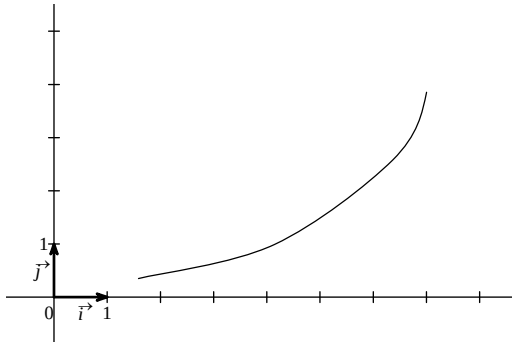
*f* est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout $x \in \mathrm{I}$ $f'(x) \geq 0$, alors *f* est croissante sur I.
- Si pour tout $x \in \mathrm{I}$ $f'(x) \leq 0$, alors *f* est décroissante sur I.
- Si pour tout $x \in \mathrm{I}$ $f'(x) = 0$, alors *f* est constante sur I.

**Le sens de variation d'une fonction est donné par le signe de la dérivée.**

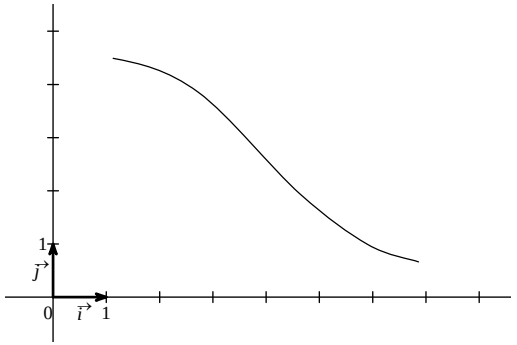
**Schéma :**

**2°) Interprétation graphique**




***f* est croissante sur I.**

**Toutes les tangentes ont un coefficient directeur positif ou nul.**




***f* est décroissante sur I.**

**Toutes les tangentes ont un coefficient directeur négatif ou nul.**

**3°) Application pratique**

**Pour déterminer le sens de variation d'une fonction, on étudie le signe de la dérivée (voir exemple dans le II).**

## II. Exemple d'étude du sens de variation d'une fonction polynôme du second degré

$f : x \mapsto x^2 - 2x + 5$

$\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}$.

*f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme)

$f'(x) = 2x - 2$

$2x - 2$ est une expression du type $ax + b$.
On sait étudier le signe d'une expression de la forme $ax + b$.

$2x - 2 = 0$
$x = 1$

On dresse un tableau récapitulatif comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | – | 0 | + | |
| Variations de *f* | | ↘ | 4 | ↗ | |

**Calcul du minimum global**

**Pour calculer le minimum global, il faut calculer l'image de 1 par la fonction *f*.**

$f(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 5$
$= 4$

**On ne descend pas les barres simples sur la dernière ligne.**

**Phrases :**

La fonction *f* est décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 1]$.
La fonction *f* est croissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

# 1ère L Option — Exercices sur sens de variations de fonctions

**1** Soit *f* une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [2 ; 7].

On sait que $f(2)=1$, $f(3)=2$ et $f(7)=\frac{1}{2}$.

Compléter le tableau de variation suivant. Tracer les flèches de variations à la règle.

| $x$ | 2 | | 3 | | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | + | 0 | – | |
| Variations de *f* | | | | | |

**2** Soit *f* une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [–2 ; 5].

On sait que $f(-2)=-2$, $f(0)=0$, $f(3)=2$, $f(5)=0$, $f'(0)=0$ et $f'(3)=0$.

Pour tout réel *x* de l'intervalle [–2 ; 3[, on a : $f'(x)>0$ et pour tout *x* de l'intervalle ]3 ; 5], on a : $f'(x)<0$

Dresser le tableau de variation de *f*. Tracer les flèches de variations à la règle.

| $x$ | |
|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | |
| Variations de *f* | |

**3** Soit *f* une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [–3 ; 4].

On sait que $f(-3)=2$, $f(1)=0$, $f(2)=-3$, $f(4)=-1$, $f'(2)=0$ et $f'(3)=0$.

Pour tout réel *x* de l'intervalle [–3 ; 2[, on a : $f'(x)<0$ et pour tout *x* de l'intervalle ]2 ; 4], on a : $f'(x)>0$.

Dresser le tableau de variation de *f*. Tracer les flèches de variations à la règle.

| $x$ | |
|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | |
| Variations de *f* | |

**4** Soit *f* une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [–2 ; 5].

Compléter le tableau de variation de *f*.

| $x$ | –2 | | 0 | | 1 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | | 0 | | 0 | | |
| Variations de *f* | –4 | ↗ | 1 | ↘ | –2 | ↗ | 0 |

**5** On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+2x+3$.

Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de *f*.

Calculer l'extremum.

Faire des phrases pour expliquer le sens de variation de la fonction.

**6** On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2+4x-5$.

Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de *f*.

Calculer l'extremum.

Faire des phrases pour expliquer le sens de variation de la fonction.

**7** On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+2x-6$.

1°) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de *f*.

Calculer l'extremum.

Faire des phrases pour exprimer les variations de la fonction *f*.

2°) Recopier et compléter le tableau de valeurs :

| $x$ | –4 | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Sur un graphique, tracer le repère (O, I, J) en prenant un centimètre ou un gros carreau pour unité graphique.
Placer les points du tableau précédent.
Mettre des pointillés et les valeurs sur les axes pour le point correspondant à l'extremum.
Tracer la tangente horizontale en ce point en utilisant la représentation conventionnelle sous la forme d'une double flèche.
Tracer $\mathcal{C}$ en reliant les points précédents « à la main » en tenant compte du tableau de variations.
On soignera particulièrement l'allure de la courbe au voisinage de la tangente horizontale.
Contrôler sur la calculatrice graphique.