1[ère] S Chap. 22

Limites de fonctions (1)
Approche intuitive ; limites des fonctions de référence

I. Introduction

1°) Rappel

• **Déjà vu :** notion de « x tend vers » dans le chapitre 18 (Nombre dérivé d'une fonction).

$\lim\limits_{x\to 0}(x+4)=4$

$\lim\limits_{x\to 1}(x+4)=5$

Nous avions alors appliqué sans le dire la règle suivante (admise sans démonstration) valable pour les fonctions que nous rencontrerons cette année (telles que fonctions polynômes, fonctions rationnelles, fonctions trigonométriques) :

> f est une fonction définie sur un intervalle I.
> Si $a\in \mathrm{I}$, alors on a : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

• **Nouveauté**

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2$

$\lim\limits_{x\to -\infty} x^2$

2°) Commentaire

Quand on a $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2$ ou $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2$:

• on regarde ce qu'il y a sous le lim :

$x \longrightarrow +\infty$

flèche « tend vers » ($\neq$ flèche « associe » $\mapsto$)

• on remplace x par de très grands nombres.

$x \longrightarrow +\infty$: par de très grands nombres positifs.

$x \longrightarrow -\infty$: par de très grands nombres négatifs.

• Ensuite, on regarde.

3°) Remarque

$\left|\lim\limits_{x\to +\infty}\right| x^2$

Intérêt

Mettre les limites dans les tableaux de variations.

II. La fonction carrée

1°) Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

extremum

Repasser en rouge les limites.

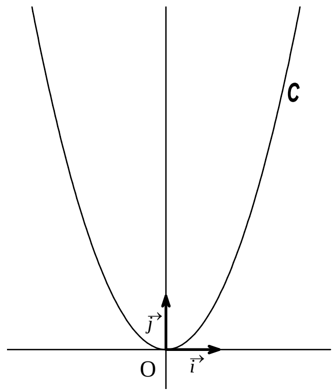
2°) Ecriture

$\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} x^2=+\infty}$

$=$

$\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty} x^2=+\infty}$

3°) Courbe



III. La fonction cube

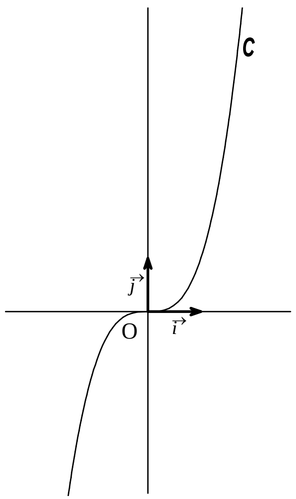
1°) Tableau de variations

x	$-\infty$		$+\infty$
x^3	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2°) Ecriture

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty} \quad \neq \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty}$$

3°) Courbe



IV. La fonction racine carrée

1°) Tableau de variations

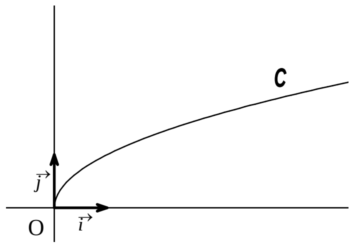
x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$	$+\infty$

extremum **limite**

2°) Ecriture

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty}$$

3°) Courbe



V. La fonction inverse

1°) Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	0	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	0

2°) Ecriture

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0}$

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty}$

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{1}{x}=-\infty}$

(il y a 2 cas)

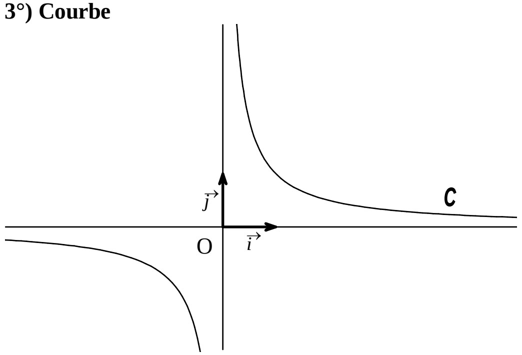
N.B. : 0 n'est jamais atteint ; c'est une limite.

Pour les limites en + et – on peut prendre l'exemple d'un euro que l'on partagerait pour tous les habitants de la planète. Chacun recevrait presque rien.

Pour la limite quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, on peut prendre l'exemple d'une division par 0,1, 0,01, 0,001 ; on obtient 10, 100, 1000 c'est-à-dire des nombres de plus en grands positifs.

Pour la limite quand x tend vers 0 par valeurs inférieures, on peut prendre l'exemple d'une division par –0,1, –0,01, –0,001 ; on obtient –10, –100, –1000 c'est-à-dire des nombres négatifs de plus en grands en valeur absolue.

3°) Courbe



Branches infinies

La courbe de la fonction inverse admet les axes de coordonnées pour **asymptotes** c'est-à-dire qu'elle s'en rapproche sans jamais les toucher.

L'axe des abscisses est une asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$.

L'axe des ordonnées est une asymptote verticale.

VI. Limites de référence (à savoir par cœur)

n est un entier naturel non nul.

1°) Règle 1

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^n\right)=+\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^n\right)=\begin{cases}+\infty & \text{si } n \text{ est pair } (2, 4, 6 \dots)\\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair } (1, 3, 5\dots)\end{cases}$$

2°) Règle 2

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty}$

3°) Règle 3

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

4°) Règle 4

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x^n}=+\infty}$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x^n}=\begin{cases}+\infty & \text{si } n \text{ est pair } (2, 4, 6 \dots)\\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair } (1, 3, 5\dots)\end{cases}$$

5°) Règle 5 (limite d'une fonction constante)

k est un réel fixé

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}k=k}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}k=k}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to a}k=k}$ $\quad(a\in\mathbb{R})$

VII. Conséquence

On peut déduire de manière « logique » les limites de fonctions associées aux fonctions de référence.

Exemples

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$

(le $-$ est à l'extérieur)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2\right)=\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+x\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+3\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+2\right)=2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x}\right)=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$

Remarque

Dans les exercices, on nous demandera de calculer les limites pour compléter les tableaux de variations (on les met en plus des extremums et non pas à la place des extremums !).

On mettra les limites et les extremums.

Les limites doivent être cohérentes avec le sens de variation.

VIII. Remarques d'écriture

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2\right)$

1°) Flèche « tend vers » : $\longrightarrow$

$\neq$

« a pour image » $\mapsto$
« associe »

2°) $\left|\lim\limits_{x\to+\infty}\right|$

3°) Parenthèses

obligatoires pour une somme, une différence, un produit

facultatives sinon

Exemples :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+3\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$

pas de parenthèses