$1^{\text{ère}}$ S Chap. 21 Sens de variation d'une fonction dérivable

I. Taux de variation d'une fonction

1°) Définition

I est un intervalle.
f est une fonction définie sur I.
a et b sont deux réels quelconques dans I tels que $a \neq b$.
On appelle **taux de variation de *f* entre *a* et *b*** le nombre $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

2°) Intérêt

Le taux de variation sert à quantifier les variations d'une fonction entre deux réels.
Nous verrons qu'il intervient dans des situations variées (par exemple, pour les vitesses moyennes).

3°) Taux de variation et monotonie

∗ **1er cas : *f* est croissante sur I**

- Si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$.
- Si $a > b$, alors $f(a) \geq f(b)$.

Dans les deux cas, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0$

∗ **2e cas : *f* est décroissante sur I**

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq 0$.

Retenir

Le taux de variation d'une fonction croissante sur un intervalle est toujours positif ou nul.
Le taux de variation d'une fonction décroissante sur un intervalle est toujours négatif ou nul.

II. Lien entre signe de la dérivée et sens de variation

1°) Signe de la dérivée d'une fonction monotone

f est une fonction définie, dérivable et monotone sur un intervalle I.
$x \in \mathrm{I}$ fixé.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\text{taux de variation de } f \text{ entre } x \text{ et } x+h} \quad \text{(définition)}$$

2 cas

***f* est croissante sur I**	***f* est décroissante sur I**
$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$	$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$	$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$
$f'(x) \geq 0$	$f'(x) \leq 0$

2°) Principe de LAGRANGE pour la monotonie

LAGRANGE : mathématicien français (1736-1813)

Nous admettrons sans démonstration la réciproque du résultat du 1°).

f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout $x \in \mathrm{I}$ $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.
- Si pour tout $x \in \mathrm{I}$ $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si pour tout $x \in \mathrm{I}$ $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Le signe de la dérivée donne le sens de variation de *f*.

Schéma :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{f} & \longrightarrow & f' \\ & & \downarrow \\ \textbf{Variation de } \boldsymbol{f} & \longleftarrow & \textbf{Signe de } f' \end{array}$$

Fonction (primitive)
↓
Dérivée (signe)
↓
Fonction de départ (variation)

Les dérivées constituent un nouveau moyen d'étude, plus puissant que les moyens antérieurs tels que composées ou étude directe.

3°) Règle pour la stricte monotonie (admise sans démonstration)

> f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
> - Si f ' est strictement positive sauf éventuellement en des réels isolés où la fonction dérivée est nulle, alors f est strictement croissante sur I.
> - Si f ' est strictement négative sauf éventuellement en des réels isolés où la fonction dérivée est nulle, alors f est strictement décroissante sur I.

III. Exemples d'étude de sens de variation

1°) Exemple 1

$f : x \mapsto x^2 - 2x + 5$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme).

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x - 2$

$2x - 2$ est une expression du type $ax + b$.

$2x - 2 = 0$
$x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	4	$\nearrow$	

Calcul du minimum global

$f(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 5$
$= 4$

On ne descend pas les barres simples sur la dernière ligne.

Phrases :

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$.
La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

2°) Exemple 2

$f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme)

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 - 3$
$= 3(x^2 - 1)$
$= 3(x+1)(x-1)$

$x + 1 = 0$	$x - 1 = 0$
$x = -1$	$x = 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

Calcul des extremums locaux

$f(1) = -1$

$f(-1) = 3$

Phrases

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$ et sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-1\,;1]$.

3°) Exemple 3

$f : x \mapsto \dfrac{2x+5}{x+3}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ car c'est une fonction rationnelle.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\} \quad f'(x) = \dfrac{2(x+3) - 1(2x+5)}{(x+3)^2}$
$= \dfrac{1}{(x+3)^2}$

Un carré est toujours positif ou nul.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signe de $(x+3)^2$		+	0	+	
Signe de $f'(x)$		+	‖	+	
Variations de f		↗	‖	↗	

N.B. :

On descend les doubles barres pour les valeurs interdites jusque sur la dernière ligne.

Phrases :

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-3[$ et sur l'intervalle $]-3\,;+\infty[$.
Attention : ne pas mettre $]-\infty\,;-3[\cup]-3\,;+\infty[$.

Comme il y a une valeur interdite, la courbe de f sera en deux parties séparées par une droite.

On ne calcule pas $f(-3)$ car $-3 \notin \mathcal{D}_f$.

IV. <u>Compléments sur les tableaux de variations</u> (tableaux récapitulatifs)

Liens avec les méthodes antérieures

On comprend pourquoi :
- on a étudié les dérivées ;
- on a étudié les études de signes.

Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3x}{x^2+x+1}$.
On ne sait pas faire en composée mais on va savoir le faire en dérivée.

1°) Les barres

On ne descend pas les barres simples sur la dernière ligne mais on descend les doubles barres qui correspondent aux valeurs interdites sur la dernière ligne.

Les doubles barres sont infranchissables (comme sur la route pour les lignes continues ; on peut perdre des points en les franchissant !).

Les doubles barres interviennent dans le tableau récapitulatif sur la ligne « Signe de $f'(x)$ » et sur la ligne « Variations de f ».

S'il y une double barre sur la ligne « Signe de $f'(x)$ », il y a automatiquement une double barre sur la ligne « Variations de f ».

Les doubles barres correspondent à l'ensemble de définition de la fonction f (et à l'ensemble de dérivabilité de f).

La courbe peut être en plusieurs morceaux.

2°) Extremums

Le tableau de variations d'une fonction permet de connaître les **extremums locaux et globaux** de cette fonction.

<u>Extremum local</u> : extremum de la fonction sur un plus petit intervalle que l'ensemble de définition.
Attention, un maximum local peut être inférieur à un minimum local.

Une remarque importante : un maximum local peut-être plus petit qu'un minimum local.

x	$-\infty$		-4		1		3		$+\infty$
Variations de f		↗	-3	↘	‖	↘	5	↗	

Les mots qui marchent ensemble :

On doit toujours préciser **« fonction croissante sur … », « fonction décroissante sur … », « fonction monotone sur … » (et non pas croissante tout court)**.

On doit toujours dire **« minimum de la fonction sur … », « maximum de la fonction sur … », « extremum de la fonction sur … »**.

3°) Les flèches de variations

Les flèches de variations expriment que la fonction est strictement croissante ou strictement décroissante pus une autre propriété de la fonctions qui sera vue en Terminale.

Les variations doivent être exprimées intervalle par intervalle.
On ne peut exprimer les variations sur une réunion d'intervalles.

Cette année nous étudierons surtout des fonctions polynômes et rationnelles.
Nous étudierons également quelques fonctions avec des racines carrées et, plus tard, quelques fonctions trigonométriques.

4°) Tableau d'une fonction sur un intervalle inclus dans l'ensemble de définition

Exemple :

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$
Faire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle]1 ; +∞[.

x	1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	
Variations de f	‖	↘	

Observer comment est mise la double barre.

Il est possible de faire le tableau de variations de la fonction sur le domaine tout entier puis de se restreindre ensuite à l'intervalle demandé.

V. <u>Tracés de courbes</u>

1°) Exemple

$f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$

Tableau de variations (cf. III 2°))

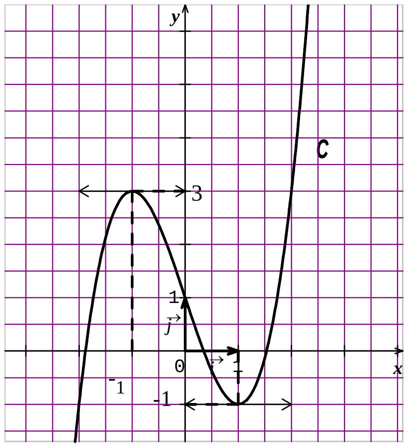
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	–	0	+	
Variations de f		↗	3	↘	-1	↗	

Tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	3	1	-1	3

$f'(1) = f'(-1) = 0$

Donc $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisse -1 et 1.
On commence par tracer les points et les tangentes.



2°) Premières règles de tracé des courbes

• On commence par tracer les tangentes horizontales $\left(f'(a) = 0\right)$ avec les pointillés et les valeurs sur les axes sous la forme d'une **double flèche** $\longleftrightarrow$.

• On utilise ensuite le tableau de variation et éventuellement un tableau de valeurs pour placer quelques points.

Vérification sur calculatrice graphique ou sur ordinateur.
Attention : la calculatrice graphique ne trace pas les tangentes tout court.
Quand il y a des valeurs interdites, la courbe est en plusieurs parties séparées par des droites (on étudiera ces droites plus tard).

V. <u>Extremums</u>

1°) Utilisation de tableaux de variation

Le tableau de variations d'une fonction permet de connaître les extremums locaux et globaux de cette fonction.

<u>Extremum local</u> : extremum de la fonction sur un plus petit intervalle que l'ensemble de définition.
Attention, un maximum local peut être inférieur à un minimum local.

On ne descend pas les barres simples sur la dernière ligne mais on descend les doubles barres qui correspondent aux valeurs interdites sur la dernière ligne.

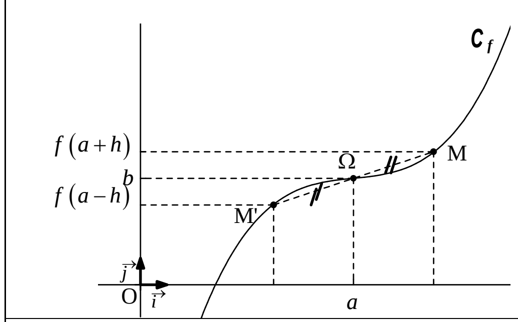
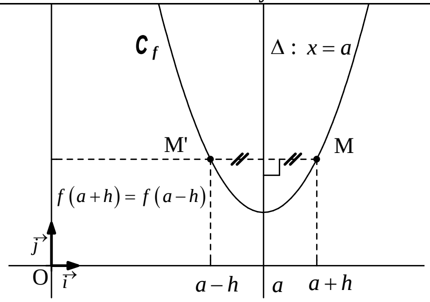
2°) Application aux problèmes d'optimisation

On utilise une fonction pour modéliser un problème (économique, géométrique…)

(Voir exercices).

VI. Eléments de symétrie d'une courbe

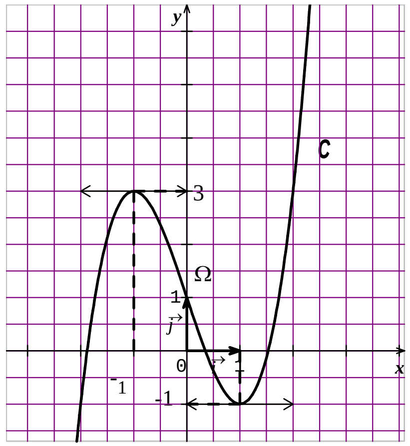
1°) Règle

Centre de symétrie	Axe de symétrie
	
$\mathcal{C}_f$ admet le point $\Omega(a\,;b)$ pour centre de symétrie lorsque • $\mathcal{D}_f$ est centré en a • Pour tout réel h tel que $a+h\in\mathcal{D}_f$, on a : $\dfrac{f(a+h)+f(a-h)}{2}=b$ a : abscisse de A b : ordonnée de A	$\mathcal{C}_f$ admet la droite Δ d'équation réduite $x=a$ pour axe de symétrie <u>dans un repère orthogonal</u> lorsque • $\mathcal{D}_f$ est centré en a • Pour tout réel h tel que $a+h\in\mathcal{D}_f$, on a : $f(a+h)=f(a-h)$

La formule du centre de symétrie vient de la formule des coordonnées du milieu d'un segment : le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}$ et pour ordonnée $y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}$.

2°) Exemple

$f : x \mapsto x^3-3x+1$
$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$
(courbe tracée au IV)



Démontrons que $\mathcal{C}_f$ admet le point $\Omega(0\,;1)$ pour centre de symétrie.

$a \quad b$

$a=0 \qquad b=1$

• $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$ est centré en 0.

• Soit h un réel.

$f(0+h)=h^3-3h+1$
$f(0-h)=-h^3+3h+1$
$\dfrac{f(0+h)+f(0-h)}{2}=\dfrac{h^3-3h+1-h^3+3h+1}{2}=1$

On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet le point $\Omega(0\,;1)$ pour centre de symétrie.

3°) Remarque

$\mathcal{D}=\mathbb{R}$ est centré en n'importe quel réel.