$1^{\text{ère}}$ S Chapitre 20 — Opérations sur les dérivées — Calculs de dérivées

I. Dérivée d'une somme

1°) Propriété

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

La fonction $u+v$ est dérivable sur I
et la dérivée est donnée par la formule $(u+v)'=u'+v'$.

(La dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées).

2°) Exemples

• Exemple 1

$\boxed{f : x \mapsto x^2+x}$

Calculer la dérivée de f.

Méthode :

On décompose.

On pose

$u(x)=x^2$
$v(x)=x$

(u et v sont deux fonctions de référence).

(On passe en « mode dérivée »)
$u'(x)=2x$
$v'(x)=1$

On écrit $f=u+v$.
On pose la formule $f'=u'+v'$.
On remplace avec les expressions précédentes.

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)=2x+1}$

(le ' indique que l'on fait la dérivée ; on dit que l'on a « dérivé » la fonction)

• Exemple 2 $\boxed{f : x \mapsto x^3+1}$

On pose

$u(x)=x^3$
$v(x)=1$

$u'(x)=3x^2$
$v'(x)=0$

$f=u+v$.
$f'=u'+v'$.

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)=3x^2}$

3°) Remarque

La formule de dérivée d'une somme s'applique pour la somme de plus de deux termes.
La dérivée d'une somme avec un nombre quelconque de termes est égale à la somme des dérivées.

II. Dérivée du produit d'une fonction par un réel

1°) Propriété

u est une fonction dérivable sur un intervalle I et k est un réel.
La fonction ku est dérivable sur I
et la dérivée est donnée par la formule $(ku)'=ku'$.

(Pour dériver, on garde la constante ; on dérive la fonction).

2°) Exemples

• Exemple 1

$\boxed{f : x \mapsto 5x^2}$

Calculer la dérivée de f.

Méthode :

On décompose (« on divise en deux »).

On pose

$u(x)=x^2$
$k=5$

(u est une fonction de référence).

(On passe en « mode dérivée »)

$u'(x)=2x$

On écrit $f=ku$.
On pose la formule $f'=ku'$.
On remplace avec les expressions précédentes (on multiplie).

$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=10x}$

• **Exemple 2** $\boxed{f : x \mapsto \dfrac{x^3}{2}}$

Réécriture :

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^3$

$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\dfrac{1}{2}3x^2=\dfrac{3x^2}{2}}$

• **Exemple 3** $\boxed{f : x \mapsto \dfrac{2}{x}}$

Réécriture :

$f(x)=2\times\dfrac{1}{x}$

$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=2\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{2}{x^2}}$

III. Dérivée d'un produit

1°) Propriété

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
La fonction uv est dérivable sur I
et la dérivée est donnée par la formule $(uv)'=u'v+uv'$.

2°) Mise en garde

Attention, la formule est plus compliquée ; la dérivée d'un produit n'est pas égale au produit des dérivées.

« C'est comme les identités remarquables »

3°) Exemple

Voir exercices.

IV. Dérivée de l'inverse d'une fonction

1°) Propriété

u est une fonction dérivable sur un intervalle I, qui ne s'annule pas sur I.
La fonction $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I
et la dérivée est donnée par la formule $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$.

(attention, la formule est complexe)

2°) Exemple

Voir exercices.

V. Dérivée d'un quotient

1°) Propriété

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que v ne s'annule pas sur I.
La fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I
et la dérivée est donnée par la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

(attention, la formule est complexe)

2°) Commentaires

Attention à bien mémoriser cette formule

Le – du haut ; l'ordre des facteurs ; pas de dérivée en bas.

Ça change vraiment quelque chose si l'on fait *uv'–u'v* au lieu de *u'v–uv'* à cause du signe – (alors que pour le produit, que l'on fasse $u'v+uv'$ ou $uv'+u'v$, ça ne change rien à cause du signe +).

3°) Exemple

Voir exercices.

VI. Dérivée d'une puissance d'exposant entier naturel

1°) Propriété (admise sans démonstration)

u est une fonction dérivable sur un intervalle I et n est un entier naturel.
La fonction u^n est dérivable sur I
et la dérivée est donnée par la formule $(u^n)'=nu'u^{n-1}$.

(attention, la formule est complexe)

2°) Cas particulier important : exposant 2

$\boxed{\left(u^2\right)' = 2uu'}$

VII. Dérivée de l'inverse d'une puissance d'exposant entier naturel

1°) Propriété (admise sans démonstration)

> u est une fonction dérivable sur un intervalle I ne s'annulant pas sur I et n est un entier naturel.
> La fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable sur I
> et la dérivée est donnée par la formule $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$.

(attention, la formule est complexe)

2°) Cas particulier important : exposant 1 (déjà vue)

$\boxed{\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}}$

VIII. Tableau récapitulatif

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, k est un réel, n est un entier naturel.

Fonction	Dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$k\times u$	$k\times u'$
$u\times v$	$u'v+uv'$
$\dfrac{1}{u}$ $(u\neq 0)$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$ $(v\neq 0)$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\dfrac{1}{u^n}$	$-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$

On combine ce tableau avec le tableau des dérivées des fonctions de référence.

IX. Dérivation des fonctions polynômes et rationnelles (conséquence des règles de dérivation)

1°) Propriété (dérivabilité des fonctions polynômes)

> **Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.**

2°) Propriété (dérivabilité des fonctions rationnelles)

> **Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.**

3°) Remarque

Cette année, nous étudierons surtout des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles (ainsi que quelques fonctions trigonométriques).

X. Rédaction et présentation définitives des calculs

1°) Exemple 1

$\boxed{f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 10x - 1}$

$D_f = \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme).

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2\times 3x^2 - 4\times 2x + 10\times 1 + 0$

(On dérive chaque monôme)

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 6x^2 - 8x + 10}$

2°) Exemple 2

$\boxed{f(x) = \dfrac{2x-1}{x+4}}$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{-4\}$

Version au propre	Brouillon
f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-4\}$ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-4\}\quad f'(x)=\dfrac{2(x+4)-(2x-1)\times 1}{(x+4)^2}$ Utiliser des parenthèses (« parenthèses de sécurité ») $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-4\}\quad f'(x)=\dfrac{9}{(x+4)^2}}$ On ne développe pas le dénominateur.	On pose $u(x)=2x-1$ $v(x)=x+4$ $u'(x)=2$ $v'(x)=1$ $f=\dfrac{u}{v}$ $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ $f'(x)=\dfrac{2(x+4)-(2x-1)\times 1}{(x+4)^2}=\dfrac{9}{(x+4)^2}$

XI. <u>Démonstrations des opérations algébriques</u>

1°) Tableau

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
k est un réel.
$a\in \mathrm{I}$

	$f(x)=$	$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
L₁	$u(x)+v(x)$	$=\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}+\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$	$(u+v)'(a)=u'(a)+v'(a)$
L₂	$k\times u(x)$	$k\times\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}$	$k\times u'(a)$
L₃	$u(x)\times v(x)$	$\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}\times v(a+h)+u(a)\times\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$	$u'(a)\times v(a)+u(a)\times v'(a)$
L₄	$\dfrac{1}{u(x)}$	$-\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}\times\dfrac{1}{u(a+h)\times u(a)}$	$-\dfrac{u'(a)}{\left[u(a)\right]^2}$

2°) Justification de la 2e colonne

Ligne L_1

$f(x)=u(x)+v(x)$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}$$
$$=\frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h}$$
$$=\frac{u(a+h)-u(a)}{h}+\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

Ligne L_2

$f(x)=k\times u(x)$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{k\times u(a+h)-k\times u(a)}{h}$$
$$=k\times\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$$

Ligne L_3

$f(x)=u(x)\times v(x)$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(u\times v)(a+h)-(u\times v)(a)}{h}$$

introduits de force

$$=\frac{u(a+h)\times v(a+h)-u(a)\times v(a+h)}{h}+\frac{u(a)\times v(a+h)-u(a)\times v(a)}{h}$$
$$=\underbrace{\frac{u(a+h)-u(a)}{h}}\times v(a+h)+u(a)\times\underbrace{\frac{v(a+h)-v(a)}{h}}$$

Ligne L₄

$$f(x)=\frac{1}{u(x)}$$

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}&=\frac{\frac{1}{u}(a+h)-\frac{1}{u}(a)}{h}\\&=\frac{\frac{1}{u(a+h)}-\frac{1}{u(a)}}{h}\\&=\frac{\frac{u(a)-u(a+h)}{u(a+h)u(a)}}{h}\\&=\frac{-\frac{u(a+h)-u(a)}{u(a+h)u(a)}}{h}\\&=-\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\times\frac{1}{u(a+h)\times u(a)}\end{aligned}$$

3°) Justification de la 3^e colonne

On passe de la 2^e colonne à la 3^e colonne en faisant $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

H_1 : u est dérivable en a

H_2 : v est dérivable en a

H_1 : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}=u'(a)$

H_2 : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{v(a+h)-v(a)}{h}=v'(a)$

On passe de la 2^e colonne à la 3^e colonne en prenant $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Ligne L₁

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=u'(a)+v'(a)$$

Ligne L₂

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=k\times u'(a)$$

Ligne L₃

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=u'(a)\times v(a)+u(a)\times v'(a)$$

On admet intuitivement que $\lim\limits_{h\to 0}v(a+h)=v(a)$

4°) Autres formules

$$\begin{aligned}\left(u^2\right)'&=(u\times u)'\\&=u'\times u+u\times u' \quad \text{(on connaît la dérivée d'un produit)}\\&=2uu'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(u^3\right)'&=\left(u^2\times u\right)'\\&=\left(u^2\right)'\times u+u^2\times u'\\&=2uu'\times u+u^2\times u'\\&=3u'u^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{u}{v}\right)'&=\left(u\times\frac{1}{v}\right)' \quad \text{(astuce : réécriture)}\\&=u'\times v+u\times\left(\frac{1}{v}\right)' \quad \text{(on connaît la dérivée d'un produit et d'un inverse)}\\&=u'\times v+u\times\left(-\frac{v'}{v^2}\right)\\&=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}\end{aligned}$$

XII. <u>Composée d'une fonction affine suivie d'une fonction dérivable</u>

1°) Théorème (admis sans démonstration)

a et b sont deux réels tels que $a\neq 0$.
I et J sont deux intervalles tels que $\forall x\in \mathrm{I}\quad ax+b\in \mathrm{J}$.
u est une fonction définie et dérivable sur J.
f est la fonction définie par $f(x)=u(ax+b)$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I} \arrow[r] & \mathrm{J} \arrow[r] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "f"'] & ax+b \arrow[r, mapsto] & u(ax+b) \end{tikzcd}$$

La fonction f est dérivable sur I et $\forall x\in \mathrm{I}\quad f'(x)=\underline{\underline{a}}\times u'(ax+b)$.

2°) Autre écriture

On retient $\left[u\left(ax+b\right)\right]' = \underline{\underline{a}} \times \underbrace{u'\left(ax+b\right)}_{\text{image de } ax+b \text{ par la fonction } u'}$.

XIII. <u>Fonctions comportant des racines carrées</u>

1°) Rappel

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Le domaine de dérivabilité est plus petit que le domaine de définition ; *f* est définie en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

2°) Règle

> a et b sont deux réels tels que $a \neq 0$.
> On note I l'ensemble des réels x tels que $ax+b \geq 0$ et I' l'ensemble des réels x tels que $ax+b > 0$.
> *f* est la fonction définie par $f\left(x\right) = \sqrt{ax+b}$.
> *f* est définie sur I.
> *f* est dérivable sur I'.
> $\forall x \in \text{I}' \quad f'\left(x\right) = \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

Cas particulier de la règle du VII. $f\left(x\right) = u\left(ax+b\right)$.

3°) Exemple

$f\left(x\right) = \sqrt{3-x}$

f est définie sur $\left]-\infty\,;3\right]$.

f est dérivable sur $\left]-\infty\,;3\right[$.

$\forall x \in \left]-\infty\,;3\right[\quad f'\left(x\right) = -\dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}$

4°) Remarque (formule étudiée en Terminale)

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$