TS — Exercices sur les nombres complexes (3)

1 Déterminer une écriture trigonométrique des nombres complexes suivants :

$z_1=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$; $z_2=-17$; $z_3=5\mathrm{i}$; $z_4=-6\sqrt{3}+6\,\mathrm{i}$; $z_5=-1-\mathrm{i}$; $z_6=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

2 Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$z_1=\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}$; $z_2=-3\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$; $z_3=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$

3 On pose $z=\cos\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}$.

1°) Écrire z sous forme exponentielle.

2°) Calculer z^{10} sous forme algébrique.

4 On pose $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$.

Calculer z^6 sous forme algébrique.

5 On pose $z_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $z_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $z_3=\frac{z_1}{z_2}$.

1°) Écrire z_1, z_2, z_3 sous forme algébrique.

2°) Calculer $z_3=\frac{z_1}{z_2}$ sous forme exponentielle ; en déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

6 On pose $z=\frac{(1+\mathrm{i})^4}{\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^3}$.

Écrire z sous forme algébrique.

7 Soit θ un réel dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

Déterminer une écriture exponentielle du nombre complexe $z=1+\mathrm{i}\tan\theta$.

8 Soit θ un réel dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi[$. On pose $z=1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Calculer $z\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$; en déduire z sous forme exponentielle.

9 Soit θ un réel quelconque. On pose $z_1=\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta$ et $z_2=\frac{\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}{\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta}$.

Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes z_1 et z_2.

Dans tous les exercices de **10** à **14**, le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v})$.

10 On considère les points A(1 + i), B(4 + 5i) et C(5 – 2i).

Faire une figure.

Calculer $Z=\frac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}$ sous forme exponentielle.

À l'aide du module et d'un argument de *Z*, déterminer la nature de ABC.

11 On considère les points $\mathrm{A}\left(-4\sqrt{3}-4\mathrm{i}\right)$, $\mathrm{B}\left(-4\sqrt{3}+6\mathrm{i}\right)$ et $\mathrm{C}\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)$.

Même question qu'à l'exercice **10**.

12 Déterminer une équation paramétrique complexe du cercle $\mathcal{C}$ de centre A(– 1– i) et de rayon 5.

13 Quel est l'ensemble *E* des points M d'affixes $z=1+2\mathrm{i}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ lorsque θ décrit $\mathbb{R}$?

14 Quel est l'ensemble *E* des points M d'affixes $z=1+2\cos\theta+2\,\mathrm{i}\sin\theta$ lorsque θ décrit $\mathbb{R}$?

15 À tout nombre complexe $z\neq-2$, on associe le nombre $Z=\frac{z-3+\mathrm{i}}{z+2}$.

1°) Déterminer pour quelle valeur de z on a $Z = 0$.

2°) Soit z un nombre complexe distinct de – 2 et de 3 – i.

On note M son image dans le plan complexe *P* muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v})$.

On note également A et B les points de *P* d'affixes respectives – 2 et 3 – i.

Démontrer que $\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right)=\arg Z\ (2\pi)$.

3°) Déterminer et représenter :

- l'ensemble *E* des points M d'affixe z tels que Z soit réel ;
- l'ensemble *F* des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

On rappelle que :

$Z\in\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg Z=0\ (\pi)$; $Z\in(\mathrm{i}\mathbb{R})^* \Leftrightarrow \arg Z=\frac{\pi}{2}\ (\pi)$.

16 1°) Démontrer que pour tout réel x, on a : $\sin x\times\sin 2x=\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\cos 3x$.

Indication : on écrira $\sin x\times\sin 2x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\times\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}}{2\mathrm{i}}$.

2°) En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\times\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

17 1°) Développer $\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^4$ où x est un réel quelconque. En déduire que $\sin^4 x=\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}$.

2°) En déduire $\int_0^{\pi}\sin^4 x\,\mathrm{d}x$.

18 Démontrer que, pour tout réel x, on a : $\cos^3 x\times\sin^2 x=-\frac{1}{16}\cos 5x-\frac{1}{16}\cos 3x+\frac{1}{8}\cos x$.

19 On pose $u = 1 + \mathrm{i}$.

1°) Écrire u sous forme exponentielle ; en déduire une écriture exponentielle de $\overline{u}$.

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=u^n+\overline{u}^n$.

À l'aide du 1°), démontrer que $S_n=\lambda_n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ où λ_n est un réel que l'on précisera.

3°) Pour quelles valeurs de n a-t-on $S_n=0$?

Réponses

1 $z_1=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+\text{i}\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$; $z_2=17(\cos\pi+\text{i}\sin\pi)$; $z_3=5\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+\text{i}\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$;

$z_4=12\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+\text{i}\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$; $z_5=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)+\text{i}\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$; $z_6=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\text{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

2 Il faut utiliser les formules trigonométriques pour transformer les écritures.

Pour z_1, on utilise les formules $\cos(-\theta)=\cos\theta$ et $\sin(-\theta)=-\sin\theta$.

$z_1=\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\text{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

On s'arrête là car on a déterminé une écriture trigonométrique de z_1.

Pour z_2, on utilise les formules $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ et $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

$z_2=3\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+\text{i}\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$;

$z_2=3\left(-\cos\dfrac{\pi}{4}-\text{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=3\left[\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)+\text{i}\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=3\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+\text{i}\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

Pour z_3, on utilise les formules $\cos(-\theta)=\cos\theta$ et $\sin(-\theta)=-\sin\theta$.

$z_3=\sqrt{3}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\text{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

3 $z=\cos\dfrac{\pi}{5}+\text{i}\sin\dfrac{\pi}{5}$

1°) $z=\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{5}}$

2°) $z^{10}=\left(\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{5}}\right)^{10}=\text{e}^{\text{i}2\pi}=\cos 2\pi+\text{i}\sin 2\pi=1+\text{i}\times 0=1$

On reste avec la forme exponentielle.
Ensuite, on passe de la forme exponentielle à la forme trigonométrique.
On passe enfin de la forme trigonométrique à la forme algébrique.

4 $z^6=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5 1°) $z_1=\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{i}$; $z_3=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\text{i}\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2°) $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

6 **Méthode :** écrire 1 + i et $\sqrt{3}-\text{i}$ sous forme exponentielle (sinon il y aurait trop de calculs).
On passe par l'écriture exponentielle avant de revenir à la forme algébrique.

$1+\text{i}=\sqrt{2}\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$

$\sqrt{3}-\text{i}=2\,\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$

On utilise ces deux résultats pour effectuer le calcul de z.

$$z=\frac{\left(\sqrt{2}\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}\right)^4}{\left(2\,\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}\right)^3}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^4\text{e}^{\text{i}\pi}}{2^3\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}}=\frac{-4}{8(-\text{i})}=\frac{1}{2\text{i}}=-\frac{\text{i}}{2}$$

On remarquera l'utilisation de la « plus belle formule des maths » $(\text{e}^{\text{i}\pi}=-1)$ lors du calcul du numérateur.

7 $z=1+\text{i}\tan\theta$

La méthode habituelle pour déterminer une écriture exponentielle du nombre complexe z serait normalement de calculer le module et un argument de z.
On va cependant procéder autrement en transformant l'écriture algébrique de z.

Rappel : $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

$$z=1+\text{i}\tan\theta=1+\text{i}\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta}{\cos\theta}+\text{i}\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta+\text{i}\sin\theta)=\frac{1}{\cos\theta}\,\text{e}^{\text{i}\theta}$$

Or $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\theta>0$.

Par conséquent, l'égalité $z=\dfrac{1}{\cos\theta}\,\text{e}^{\text{i}\theta}$ donne une forme exponentielle du nombre complexe z.

8 $z\times\text{e}^{-\text{i}\frac{\theta}{2}}=\left(1+\text{e}^{\text{i}\theta}\right)\times\text{e}^{-\text{i}\frac{\theta}{2}}=\text{e}^{-\text{i}\frac{\theta}{2}}+\text{e}^{\text{i}\frac{\theta}{2}}=2\cos\dfrac{\theta}{2}$ (formule d'Euler)

On a donc : $z=\dfrac{2\cos\frac{\theta}{2}}{\text{e}^{-\text{i}\frac{\theta}{2}}}=2\cos\dfrac{\theta}{2}\,\text{e}^{\text{i}\frac{\theta}{2}}$

Il faut dire pourquoi $\cos\dfrac{\theta}{2}>0$.

Or $\theta \in]-\pi\,;\,\pi[$ par hypothèse. Donc $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

On en déduit que $\cos\frac{\theta}{2} > 0$.

On peut donc dire que l'on a déterminé une forme exponentielle de z.

$\boxed{9}$ $z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + \text{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$; $z_2 = \frac{\text{e}^{\text{i}\theta}}{\text{e}^{-\text{i}\theta}} = \text{e}^{\text{i}(\theta+\theta)} = \text{e}^{2\text{i}\theta}$.

$\boxed{10}$ $Z = -\text{i} = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}$; ABC est rectangle isocèle en A.

Solution détaillée :

Faire une figure comme l'énoncé le demande.

Méthode : on commence par calculer la forme algébrique de Z.

$$Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{5-2\text{i}-(1+\text{i})}{4+5\text{i}-(1+\text{i})} = \frac{5-2\text{i}-1-\text{i}}{4+5\text{i}-1-\text{i}} = \frac{4-3\text{i}}{3+4\text{i}} = \frac{(4-3\text{i})(3-4\text{i})}{(3+4\text{i})(3-4\text{i})} = \frac{12-16\text{i}+12\text{i}^2-9\text{i}}{9+16} = -\frac{25\text{i}}{25} = -\text{i}$$

Or $-\text{i} = 0 + \text{i}\times(-1) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \text{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}$

$Z = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}$

Module de *Z* :

$|Z| = \left|\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}\right| = 1$ (car $\forall\theta\in\mathbb{R}$ $\left|\text{e}^{\text{i}\theta}\right| = 1$)

$|Z| = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \frac{AC}{AB}$

Donc $\frac{AC}{AB} = 1$ d'où AB = AC

On en déduit que le triangle ABC est isocèle en A.

Argument de *Z* :

$\arg(Z) = \arg\left(\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}\right) = -\frac{\pi}{2}$ (2π)

Or $\arg(Z) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2}$ (2π)

On en déduit que le triangle ABC est rectangle en A.

Conclusion :

Le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

$\boxed{11}$ $Z = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$; ABC est équilatéral.

Solution détaillée :

On calcule Z d'abord sous forme algébrique puis en forme trigonométrique, et enfin en forme exponentielle.

$$Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3}+\text{i}-\left(-4\sqrt{3}-4\text{i}\right)}{-4\sqrt{3}+6\text{i}-\left(-4\sqrt{3}-4\text{i}\right)} = \frac{5\sqrt{3}+5\text{i}}{10\text{i}} = \frac{5\left(\sqrt{3}+\text{i}\right)}{10\text{i}} = \frac{\sqrt{3}+\text{i}}{2\text{i}} = \frac{\left(\sqrt{3}+\text{i}\right)\times\text{i}}{2\text{i}\times\text{i}} = -\frac{i\sqrt{3}-1}{2} = \frac{1}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$$ (par définition, $\text{e}^{\text{i}\theta} = \cos\theta + \text{i}\sin\theta$)

Module de *Z* :

$|Z| = \left|\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ (car $\forall\theta\in\mathbb{R}$ $\left|\text{e}^{\text{i}\theta}\right| = 1$)

$|Z| = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \frac{AC}{AB}$

Donc $\frac{AC}{AB} = 1$ d'où AB = AC

On en déduit que le triangle ABC est isocèle en A.

Argument de *Z* :

$\arg(Z) = \arg\left(\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}\right) = -\frac{\pi}{3}$ (2π)

Or $\arg(Z) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{3}$ (2π)

On en déduit que le triangle ABC a un angle de $\frac{\pi}{3}$ radians.

Conclusion :

Or si un triangle admet un angle géométrique de 60° et deux côtés de même longueur alors ce triangle est équilatéral.

Donc le triangle ABC est équilatéral.

$\boxed{12}$ Le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation paramétrique complexe $z=-1-\mathrm{i}+5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(\theta\in\mathbb{R})$.

$\boxed{13}$ On reconnaît une équation paramétrique complexe de cercle.
E est le cercle de centre $\mathrm{A}(1+2\mathrm{i})$ et de rayon 3.

$\boxed{14}$ $z=1+2\cos\theta+2\mathrm{i}\sin\theta=1+2(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=1+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$
On reconnaît une équation paramétrique complexe de cercle.
Donc *E* est le cercle de centre A(1) et de rayon 2.

$\boxed{15}$ **Solution détaillée :**

1°) Déterminons *z* tel que *Z* = 0.

$$Z=0 \Leftrightarrow \frac{z-3+\mathrm{i}}{z+2}=0 \Leftrightarrow z=3-\mathrm{i}$$

2°) $z\neq-2$ et $z\neq 3-\mathrm{i}$

$$\begin{aligned}\arg Z&=\arg\frac{z-3+\mathrm{i}}{z+2}\\&=\arg(z-3+\mathrm{i})-\arg(z+2)\\&=\arg(z-z_{\mathrm{B}})-\arg(z-z_{\mathrm{A}})\\&=(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{BM}})-(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{AM}})\\&=(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{BM}})+(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\vec{u})\\&=(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\vec{u})+(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{BM}})\\&=(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{BM}})\quad\text{(relation de Chasles pour les angles orientés)}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})\quad\text{(propriété sur les angles orientés de vecteurs : }(-\vec{v},-\vec{w})=(\vec{v},\vec{w})\text{)}\end{aligned}$$

3°) *E* est la droite (AB) privée du point A ; *F* est le cercle de diamètre [AB] privé du point A.

Solution détaillée :

Soit M un point du plan distinct de A et B.

$\mathrm{M}\in E \Leftrightarrow Z\in\mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow \arg Z=0\ (\pi)$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})=0\ (\pi)$

Le point B appartient à l'ensemble *E* car pour $z=z_{\mathrm{B}}$, $Z=0$ qui est réel.

Donc *E* est la droite (AB) privée de A.
On écrit : *E* = (AB) \ {A}

Soit M un point du plan distinct de A et B.

$\mathrm{M}\in F \Leftrightarrow Z\in(\mathrm{i}\mathbb{R})^*$

$\Leftrightarrow \arg Z=\frac{\pi}{2}\ (\pi)$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})=\frac{\pi}{2}\ (\pi)$

Le point B appartient à l'ensemble *F* car pour $z=z_{\mathrm{B}}$, $Z=0$ qui est imaginaire pur.

Donc *F* est le cercle de diamètre [AB] privée de A.

Faire une figure.

$\boxed{16}$ 1°) Formules d'Euler pour le sinus et le cosinus

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\\ \sin\theta&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\end{aligned}}$$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=2\cos\theta$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=2\mathrm{i}\sin\theta$

$$\begin{aligned}\sin x\times\sin 2x&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\times\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}}{2\mathrm{i}}\\&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}}{-4}\\&=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x}}{4}\\&=-\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x})-(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})}{4}\\&=-\frac{2\cos 3x-2\cos x}{4}\\&=\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\cos 3x\end{aligned}$$

2°)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\times\sin 2x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\cos 3x\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{\sin x}{2}-\frac{\sin 3x}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}-\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{6}\right)-\left(\frac{\sin 0}{2}-\frac{\sin(3\times 0)}{6}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{-1}{6}\right)-\left(\frac{0}{2}-\frac{0}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

17 1°) Utiliser la formule du binôme de Newton et le triangle de Pascal ; il s'agit d'une linéarisation d'expression trigonométrique.

$$\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4=\frac{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4}{(2i)^4}=\frac{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4}{16}$$

On fait le triangle de Pascal.

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1

Grâce aux coefficients de la dernière ligne, on peut écrire le développement de $(a+b)^4$:

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ (formule du binôme de Newton)

$$\sin^4 x=\frac{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4}{16}$$

$$=\frac{\left(e^{ix}\right)^4-4\left(e^{ix}\right)^3e^{-ix}+6\left(e^{ix}\right)^2\left(e^{-ix}\right)^2-4e^{ix}\left(e^{-ix}\right)^3+\left(e^{-ix}\right)^4}{16}$$

$$=\frac{e^{i4x}-4e^{i3x}e^{-ix}+6e^{i2x}e^{-2ix}-4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}}{16}$$

$$=\frac{e^{i4x}-4e^{i2x}+6e^{i0}-4e^{-2ix}+e^{-4ix}}{16}$$

$$=\frac{\left(e^{i4x}+e^{-4ix}\right)-4\left(e^{i2x}+e^{-2ix}\right)+6}{16}$$

$$=\frac{2\cos 4x-4\left(2\cos 2x\right)+6}{16}$$

$$=\frac{2\cos 4x-8\cos 2x+6}{16}$$

$$=\frac{\cos 4x-4\cos 2x+3}{8}$$

2°) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^4 x\,dx=\frac{3\pi}{8}$

Détail des calculs :

$$\int_0^{\pi}\sin^4 x\,dx=\int_0^{\pi}\frac{\cos 4x-4\cos 2x+3}{8}\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}\right)dx$$

$$=\left[\frac{\sin 4x}{32}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{3x}{8}\right]_0^{\pi}$$

$$=\left(\frac{\sin 4\pi}{32}-\frac{\sin 2\pi}{4}+\frac{3\pi}{8}\right)-\left(\frac{\sin 0}{32}-\frac{\sin 0}{4}+0\right)$$

$$=\left(0-0+\frac{3\pi}{8}\right)-\left(0-0+0\right)\ *$$

$$=\frac{3\pi}{8}$$

$$\boxed{\int_0^{\pi}\sin^4 x\,dx=\frac{3\pi}{8}}$$

* On peut éventuellement tracer un cercle trigonométrique au brouillon pour lire les valeurs de sin 4π et sin 2π.

18 $\cos^3 x\times\sin^2 x=\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\times\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2$

$$=\frac{\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3}{8}\times\frac{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2}{-4}$$

$$=-\frac{\left(e^{i3x}+3e^{i2x}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}+e^{-i3x}\right)\left(e^{2ix}-2e^{ix}e^{-ix}+e^{-2ix}\right)}{32}$$

$$=-\frac{\left(e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-i3x}\right)\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)}{32}$$

$$=-\frac{e^{i3x}e^{2ix}-2e^{i3x}+e^{i3x}e^{-2ix}+3e^{ix}e^{2ix}-6e^{ix}+3e^{ix}e^{-2ix}+3e^{-ix}e^{2ix}-6e^{-ix}+3e^{-ix}e^{-2ix}+e^{-i3x}e^{2ix}-2e^{-i3x}+e^{-i3x}e^{-2ix}}{32}$$

$$=-\frac{e^{i5x}-2e^{i3x}+e^{ix}+3e^{i3x}-6e^{ix}+3e^{-ix}+3e^{ix}-6e^{-ix}+3e^{-3ix}+e^{-ix}-2e^{-i3x}+e^{-i5x}}{32}$$

$$=-\frac{e^{i5x}+e^{-i5x}+e^{i3x}+e^{-i3x}-2\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}{32}$$

$$=-\frac{2\cos 5x+2\cos 3x-4\cos x}{32}$$

$$=-\frac{1}{16}\cos 5x-\frac{1}{16}\cos 3x+\frac{1}{8}\cos x$$

19 1°) $u=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$; $\overline{u}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

2°) $S_n=u^n+\overline{u}^n$

$$S_n=\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n+\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n$$
$$=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n+\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n$$
$$=\left(\sqrt{2}\right)^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{4}}+\left(\sqrt{2}\right)^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\frac{\pi}{4}}$$
$$=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{4}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\frac{\pi}{4}}\right)$$
$$=\left(\sqrt{2}\right)^n\times 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\qquad\text{(formule d'Euler : } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=2\cos\theta\text{)}$$
$$=2\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

On en déduit que $S_n=\lambda_n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ avec $\lambda_n=2\times\left(\sqrt{2}\right)^n=\left(\sqrt{2}\right)^{n+2}$.

3°) $S_n=0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \frac{n}{4}=\frac{1}{2}+k$ avec $k\in\mathbb{N}$

$\Leftrightarrow n=2+4k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Rappel : $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

Solutions détaillées

1 Écriture trigonométrique

Rappel :

$z=x+\mathrm{i}y \quad (z\neq 0)$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$
$x=r\cos\theta$
$y=r\sin\theta$
θ est l'argument de z
r est le module de z

- $z_1=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$

<u>Calcul du module r_1</u>

$r_1=|z_1|=\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$

<u>Calcul d'un argument θ_1</u>

On sait que : $\begin{cases}x_1=r_1\cos\theta_1\\ y_1=r_1\sin\theta_1\end{cases}$.

On a $\begin{cases}-\sqrt{3}=2\cos\theta_1\\ 1=2\sin\theta_1\end{cases}$ donc $\begin{cases}\cos\theta_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_1=\frac{1}{2}\end{cases}$

$\theta_1=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$z_1=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

- $z_2=-17$

<u>Calcul du module r_2</u>

$r_2=|z_2|=\sqrt{(-17)^2}=17$

<u>Calcul d'un argument θ_2</u>

On a $\begin{cases}-17=17\cos\theta_2\\ 0=17\sin\theta_2\end{cases}$ donc $\begin{cases}\cos\theta_2=-1\\ \sin\theta_2=0\end{cases}$

$\theta_2 = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$z_2 = 17(\cos \pi + \text{i} \sin \pi)$

- $z_3 = 5\text{i}$

Calcul du module r_3

$r_3 = |z_3| = \sqrt{5^2} = 5$

Calcul d'un argument θ_3

On a $\begin{cases} 0 = 5\cos\theta_3 \\ 5 = 5\sin\theta_3 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \cos\theta_3 = 0 \\ \sin\theta_3 = 1 \end{cases}$

$\theta_3 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$z_3 = 5\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + \text{i}\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

- $z_4 = -6\sqrt{3} + 6\text{ i}$

Calcul du module r_4

$r_4 = |z_4| = \sqrt{108+36} = \sqrt{144} = 12$

Calcul d'un argument θ_4

On a $\begin{cases} -6\sqrt{3} = 12\cos\theta_4 \\ 6 = 12\sin\theta_4 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \cos\theta_4 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_4 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

On en déduit que $\theta_4 = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$z_4 = 12\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + \text{i}\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$

- $z_5 = -1 - \text{i}$

Calcul du module r_5

$r_5 = |z_5| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Calcul d'un argument θ_5

On a $\begin{cases} -1 = \sqrt{2}\cos\theta_5 \\ -1 = \sqrt{2}\sin\theta_5 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \cos\theta_5 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_5 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Donc $\theta_5 = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$z_5 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + \text{i}\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$

- $z_6 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$

Calcul du module r_6

$r_6 = |z_6| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$

Calcul d'un argument θ_6

On a $\begin{cases} \dfrac{1}{2} = \cos\theta_6 \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\theta_6 \end{cases}$

Donc $\theta_6 = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$z_6 = \cos\dfrac{5\pi}{3} + \text{i}\sin\dfrac{5\pi}{3}$

(autre écriture possible : $z_6 = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$)

$\boxed{2}$ Écriture trigonométrique

- $z_1 = \cos\dfrac{\pi}{6} - \text{i}\sin\dfrac{\pi}{6}$ n'est pas un écriture trigonométrique à cause du – devant le i.

$\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6}$

$\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{6}$

$z_1 = \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \text{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

- $z_2 = -3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ n'est pas un écriture trigonométrique à cause du – devant le 3.

$$z_2 = 3\left(-\cos\frac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4}$$
$$\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

- $z_3 = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$$
$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3}$$

$$z_3 = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$\boxed{3}$ $z = \cos\dfrac{\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5}$

1°) $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}$

2°) $z^{10} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}\right)^{10} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{10\pi}{5}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 1$

$\boxed{4}$ $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$

$$z^6 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}\right)^6 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{8}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = \cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\boxed{5}$ $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$

1°) Écrivons z_1, z_2, z_3 sous forme algébrique.

$$z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_3 = \frac{\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$z_3 = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}}$$

$$z_3 = \frac{\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)}$$ (on utilise la quantité conjuguée du dénominateur)

$$z_3 = \frac{\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2}$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6} + \sqrt{6}}{2 + 2}$$

$$z_3 = \frac{\mathrm{i}\left(-\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) + \sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

2°) Calculons $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme exponentielle ; déduisons-en $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire de z_3, on obtient $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Rappels de formules de trigonométrie

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a \qquad \sin(2a) = 2\sin a \cos a$$
$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$$
$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$
$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$2\cos^2 a = 1 + \cos 2a$$
$$2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$$

$\cos a = \cos b$ si et seulement si $a = b + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ ou $a = -b + 2k'\pi \ (k' \in \mathbb{Z})$

$\sin a = \sin b$ si et seulement si $a = b + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ ou $a = \pi - b + 2k'\pi \ (k' \in \mathbb{Z})$