$1^{\text{ère}}$ S Exercices sur les formules d'addition et de duplication

1 Soit x un réel quelconque. Réduire les expressions
$A=\cos 3x\cos 5x+\sin 3x\sin 5x$; $B=\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x$
$C=\cos 7x\sin 6x-\sin 7x\cos 6x$; $D=\cos 3x\sin 2x+\cos 2x\sin 3x$.

2 Soit x un réel qui n'est pas un multiple entier de $\frac{\pi}{2}$. Calculer l'expression $A=\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}$.

3 Soit x un réel quelconque. Calculer les expressions :
$A=\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$ et $B=\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$.

4 Soit x un réel tel que $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Calculer $\cos 2x$.

5 On note a le réel de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos a=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.
Calculer $\cos 2a$; en déduire la valeur de a.

6 Soit x un réel quelconque. Démontrer les égalités
1°) $1+2\cos x+\cos 2x=2\cos x(1+\cos x)$ 2°) $1+2\sin x-\cos 2x=2\sin x(1+\sin x)$

7 Donner une factorisation des expressions $A=1-\cos 2x+\sin x$ et $B=1-\cos 2x+\sin 2x$.

8 Soit x un réel quelconque. Démontrer les égalités suivantes
1°) $(\cos x-\sin x)^2=1-\sin 2x$ 2°) $4\cos^2 x+2\sin^2 x=3+\cos 2x$ 3°) $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$.

9 Soit x un réel quelconque qui n'est pas un multiple entier de $\frac{\pi}{2}$.

1°) Simplifier $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$.

2°) A l'aide du 1°), calculer $\tan\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.

10 Soit x un réel quelconque.
Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos 2x$; en déduire $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$.

11 Soit x un réel quelconque.
En écrivant $3x=2x+x$, exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.

Réponses

1 $A=\cos 2x$; $B=\cos 3x$; $C=-\sin x$; $D=\sin 5x$ **2** $A=2$ **3** $A=B=0$ **4** $\cos 2x=-\frac{1}{3}$

5 $\cos 2a=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $a=\frac{\pi}{12}$ (il faut justifier précisément avec l'intervalle) **6** **7** $A=\sin x(2\sin x+1)$;
$B=2\sin x(\sin x+\cos x)$ **8** 2°) On change l'expression du 1er membre ; on change l'expression du second membre et on montre que les deux expressions sont égales.

On exprime toutes les deux en fonctions de $\cos^2 x$.

$4\cos^2 x+2\sin^2 x=4\cos^2 x+2\left(1-\cos^2 x\right)=2\cos^2 x+2$
$3+\cos 2x=3+2\cos^2 x-1=2+2\cos^2 x$
3°)

9 1°) $\tan x$ 2°) $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$; $\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$

10 $\cos 4x=2\cos^2(2x)-1=2\left[\cos(2x)\right]^2-1=2\left(2\cos^2 x-1\right)^2-1=\ldots=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$

11 $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$; $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$
Il est conseillé de retenir ces formules. Grâce à elles, on peut retrouver le résultat de l'exercice **2**.

$\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=\ldots=4\cos^3 x-3\cos x$
Ecrire $\sin 2x=2\sin x\cos x$ puis $\sin^2 x=1-\cos^2 x$