$1^{\text{ère}}$ S
Chapitre 29

Formules d'addition et de duplication

I. Compléments sur le produit scalaire

1°) Rappel

Une unité de longueur est fixée dans tout le chapitre.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques du plan.

$$\boxed{\begin{array}{l} \left(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}}\right)=\alpha \quad (\alpha\in[0\,;\pi]) \\ \vec{u}\bullet\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\alpha \end{array}}$$

2°) Démonstration

Le plan est orienté.
On note θ la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$.

On sait que $\left\{\begin{array}{l}\theta=\alpha\\ \text{ou}\\ \theta=-\alpha\end{array}\right.$

Dans les deux cas, on a : $\cos\theta=\cos\alpha$ (car $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$).

3°) Règle

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls du plan.
θ est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$.

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\theta$$

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$$

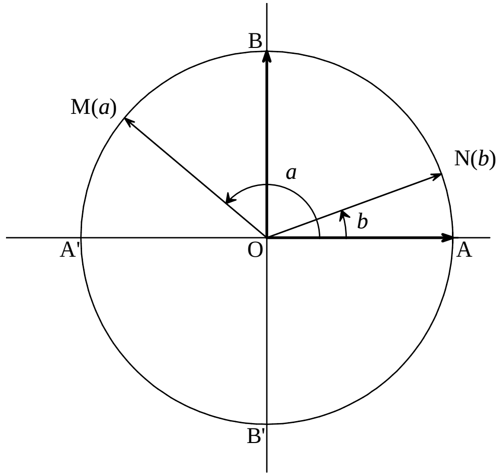
II. Formules d'addition

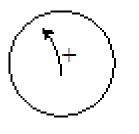
1°) Cosinus d'une différence

Hypothèses

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

a et b sont deux réels quelconques.
M est l'image de a sur le cercle trigonométrique.
N est l'image de b sur le cercle trigonométrique.





But : calculer de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{\text{ON}}\bullet\overrightarrow{\text{OM}}$.

$1^{\text{ère}}$ manière :

$$\overrightarrow{\text{ON}}\bullet\overrightarrow{\text{OM}}=\underbrace{\text{ON}}_{1}\times\underbrace{\text{OM}}_{1}\times\cos\left(\overrightarrow{\text{ON}}\,;\overrightarrow{\text{OM}}\right)$$

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\text{ON}}\,;\overrightarrow{\text{OM}}\right)&=\left(\overrightarrow{\text{ON}}\,;\overrightarrow{\text{OA}}\right)+\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,;\overrightarrow{\text{OM}}\right)\quad\text{(relation de Chasles pour les angles orientés)}\\ &=-b+a\\ &=a-b\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\text{ON}}\bullet\overrightarrow{\text{OM}}=\cos(a-b)$$

2^{e} manière :

On utilise le repère orthonormé $\left(\text{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

$$\text{M}\left|\begin{array}{l}x_{\text{M}}=\cos a\\ y_{\text{M}}=\sin a\end{array}\right. \qquad\qquad \text{N}\left|\begin{array}{l}x_{\text{N}}=\cos b\\ y_{\text{N}}=\sin b\end{array}\right.$$

$\overrightarrow{ON} \bullet \overrightarrow{OM} = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$

Conclusion

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b}$$

2°) Cosinus d'une somme

$\cos(a+b) = \cos[a-(-b)]$

Astuce de départ

1°)

$= \cos a \times \cos(-b) + \sin a \times \sin(-b)$

Formule de trigonométrie

$= \cos a \times \cos b + \sin a \times (-\sin b)$

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

3°) Sinus d'une somme

$\sin(a+b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right]$

Astuce de départ $\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right]$

1°)

$= \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}_{\sin a} \times \cos b + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}_{\cos a} \times \sin b$

$= \sin a \times \cos b + \sin b \times \cos a$

4°) Sinus d'une différence

$\sin(a-b) = \sin[a+(-b)]$

$= \sin a \times \cos(-b) + \sin(-b) \times \cos a$

$= \sin a \times \cos b + (-\sin b) \times \cos a$

$= \sin a \times \cos b - \sin b \times \cos a$

5°) Récapitulatif

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \end{array}}$$

6°) Exercice

Vérifier que : $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$

$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3} \times \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} \times \sin\frac{\pi}{4}$

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$ (valeurs exacte)

$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{3} \times \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} \times \cos\frac{\pi}{3}$

$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$

$\boxed{\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ (valeurs exacte)

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{array}}$$

Exercice personnel : $\boxed{\tan \frac{\pi}{12} = \sqrt{3} - 2}$

Retenir la méthode indiquée ci-dessus.

Autre méthode possible : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ **(autre décomposition)**

III. <u>Formules de duplication</u>

1°) Rappel

Relation fondamentale

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

N.B. : $\cos^2 x = (\cos x)^2$

Penser à l'utiliser en exercice souvent sous la forme :

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

ou

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

2°) Cosinus du double d'un réel

$a \in \mathbb{R}$

Astuce de départ :

$\cos 2a = \cos(a + a)$

1ère expression : formule d'addition

$\cos 2a = \cos a \times \cos a - \sin a \times \sin a$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

2e expression :

$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$

$\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

3e expression :

$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$

$\cos 2a = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a$

$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

3°) Sinus du double d'un réel

$\sin 2a = \sin(a + a)$

$\sin 2a = \sin a \times \cos a + \sin a \times \cos a$

$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

4°) Récapitulatif

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 2\cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 a \\ \sin(2a) &= 2\sin a \cos a \end{aligned}}$$

5°) Exemples d'utilisation (manipulations de formules)

• $\mathbf{\cos x = \frac{1}{3}}$

Calculer $\mathbf{\cos 2x}$ **.**

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{9}$

• $\mathbf{\sin x = -\frac{1}{5}}$ **.**

Calculer $\mathbf{\cos 2x}$ **.**

$\cos 2x == 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$

• $x \in \mathbb{R}$ **.**

Calculer $\mathbf{\cos 4x}$ **en fonction de** $\mathbf{\cos 2x}$**.**

$$\begin{aligned} \cos 4x &= \cos\left(2 \times \underbrace{2x}_{a}\right) \\ &= 2\cos^2 a - 1 \\ &= 2\cos^2(2x) - 1 \end{aligned}$$

- **$x \in \mathbb{R}$.**

Calculer $\cos x$ en fonction de $\cos \dfrac{x}{2}$.

$$\cos x = \cos\left(2\times \underbrace{\frac{x}{2}}_{a}\right)$$
$$= 2\cos^2 a - 1$$
$$= 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$$

- **$x \in \mathbb{R}$.**

Calculer $\cos(-2x)$ en fonction de $\cos x$.

$$\cos(-2x) = \cos(2x)$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$

6°) Application aux lignes trigonométriques de $\dfrac{\pi}{8}$

- **Calcul de $\cos \dfrac{\pi}{8}$.**

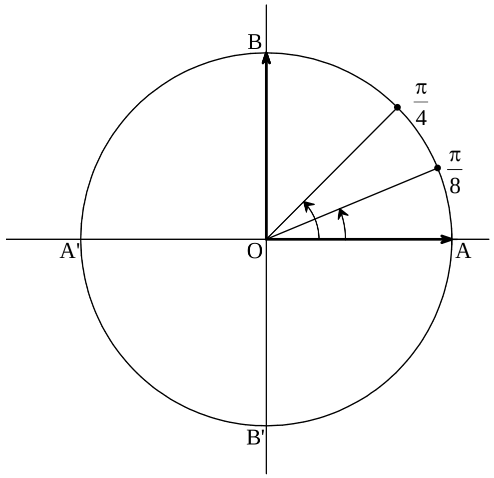
Astuce de départ : $\dfrac{\pi}{4} = 2\times\dfrac{\pi}{8}$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)$$

Formule $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\times\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$$
$$2\times\cos^2\frac{\pi}{8} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$
$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{ou} \quad \cos\frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Or $\dfrac{\pi}{8} \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\dfrac{\pi}{8} \geq 0$.



D'où $\boxed{\mathbf{\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}}$.

- **Calcul de $\sin \dfrac{\pi}{8}$.**

$$\frac{\pi}{4} = 2\times\frac{\pi}{8}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)$$

Formule $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\times\sin^2\frac{\pi}{8}$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\times\sin^2\frac{\pi}{8}$$
$$2\times\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{ou} \quad \sin\frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Or $\dfrac{\pi}{8} \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin\dfrac{\pi}{8} \geq 0$.

D'où : $\boxed{\mathbf{\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}}$.

Exercice personnel :

Calculer $\tan \frac{\pi}{8}$.

On trouve : $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

IV. <u>Formules de linéarisation</u>

1°) Carré d'un cosinus

$a \in \mathbb{R}$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

$\cos 2a + 1 = 2\cos^2 a$

$$\boxed{\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}}$$

2°) Carré d'un sinus

$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

$\cos 2a - 1 = -2\sin^2 a$ $\quad \times(-1)$

$1 - \cos 2a = 2\sin^2 a$

$$\boxed{\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}}$$

3°) Formulaire récapitulatif

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

Formulaire récapitulatif

Formules d'addition

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Formules de duplication

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$ $\qquad \sin(2a) = 2\sin a \cos a$

$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$

$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$

Formules de linéarisation

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

$2\cos^2 a = 1 + \cos 2a$

$2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$

$$1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$$

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$$