$1^{\text{ère}}$ S Chapitre 19 — Les fonctions dérivées

Dans le chapitre 18, on a défini la notion **de nombre dérivé** d'une fonction en un réel (cadre des fonctions) et la notion de tangente à une courbe en un point (cadre géométrique).

Dans ce chapitre, on va passer de l'aspect graphique à l'aspect calcul qui sera poursuivi dans le chapitre 20.

I. Du nombre dérivé à la fonction dérivée ; cas des fonctions de référence

1°) Fonction carrée

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto x^2$$

• Dans le chapitre 18, on a vu que f est dérivable en tout réel a et
$\forall a\in\mathbb{R}\quad f'(a)=2a$.
La notation $f'(a)$ est une notation à comprendre d'un bloc pour désigner la limite du quotient
$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0 (c'est le résultat de cette limite qui est un réel qu'on note ainsi).

• On dit que la fonction carrée est **dérivable** sur $\mathbb{R}$.

On va alors définir une fonction notée ***f '*** appelée **fonction dérivée** de f ou simplement **dérivée** de f.

On dit que la fonction f : $x\mapsto x^2$ a pour dérivée la fonction $f':x\mapsto 2x$ (fonction linéaire de coefficient 2).
On a ainsi l'expression de la fonction dérivée de la fonction f.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto x^2$	$f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto 2x$

f ' est la fonction qui met en correspondance tout réel et son nombre dérivé.

Il convient ici de rappeler encore une fois la différence entre f et $f(x)$; entre f' et $f'(x)$.

2°) Fonction constante

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\qquad\text{(avec } k \text{ réel fixé)}$$
$$x\mapsto k$$

• Dans le chapitre 18, on a vu que f est dérivable en tout réel a et
$\forall a\in\mathbb{R}\quad f'(a)=0$.

• On dit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On dit que la fonction f : $x\mapsto k$ a pour dérivée la fonction $f':x\mapsto 0$ (fonction constante nulle).

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto k$	$f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto 0$

3°) Fonction linéaire de coefficient 1

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto x$$

• Dans le chapitre 18, on a vu que f est dérivable en tout réel a et
$\forall a\in\mathbb{R}\quad f'(a)=1$.

• On dit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On dit que la fonction f : $x\mapsto x$ a pour dérivée la fonction $f':x\mapsto 1$ (fonction constante égale à 1).

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto x$	$f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto 1$

4°) Fonction cube

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto x^3$$

• Dans le chapitre 17, on a vu que f est dérivable en tout réel a et
$\forall a\in\mathbb{R}\quad f'(a)=3a^2$.

• On dit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On dit que la fonction f : $x\mapsto x^3$ a pour dérivée la fonction $f':x\mapsto 3x^2$.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto x^3$	$f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto 3x^2$

4°) Fonction inverse

$$f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto \frac{1}{x}$$

• Dans le chapitre 18, on a vu que f est dérivable en tout réel $a\neq 0$ et
$\forall a\in\mathbb{R}^*\quad f'(a)=-\dfrac{1}{a^2}$.

• On dit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

On dit que la fonction f : $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ a pour dérivée la fonction $f':x\mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.

$f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ $x\mapsto\dfrac{1}{x}$	$f':\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ $x\mapsto-\dfrac{1}{x^2}$

4°) Fonction racine carrée

$f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$
$x\mapsto\sqrt{x}$

- Dans le chapitre 18, on a vu que *f* est dérivable <u>en tout réel</u> $a>0$ et
  $\forall a\in\mathbb{R}_+^* \quad f'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

- On dit que la fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On dit que la fonction $f:\ x\mapsto\sqrt{x}$ a pour dérivée la fonction $f':x\mapsto\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ $x\mapsto\sqrt{x}$	$f':\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ $x\mapsto\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

La fonction racine carrée est définie sur $[0\,;+\infty[$ mais est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
La fonction racine carrée est définie en 0 mais n'et pas dérivable à droite en 0.
Le domaine de dérivabilité est plus petit que le domaine de définition.

II. <u>Fonction dérivée</u>

Passage local → global
Pour chacune des fonctions de référence, on a pu définir une fonction dérivée (avec une expression chaque fois différente).

Plus généralement, nous apprendrons à calculer des dérivées pour des fonctions plus compliquées (voir chapitre 20).

1°) Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I.   • On dit que *f* est **dérivable** $\boxed{\textbf{sur}}$ **I** lorsque *f* est **dérivable** en <u>tout</u> réel $a\in\mathrm{I}$.   • Dans ce cas, on définit une nouvelle fonction $f':\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto f'(x)$ (nombre dérivé de *f* en *x*)   appelée « **fonction dérivée** » de *f* (ou plus simplement **dérivée** de *f*).

2°) Questions

- Comment calculer la dérivée d'une fonction ? Voir chapitre 20 (Comment dériver une fonction)

- A quoi sert la dérivée de *f* ?

  → Tangentes
  → Etude de signe et sens de variation (voir chapitre 21)

3°) Remarques

- Lorsque *f* est définie sur un domaine *D* qui est la réunion de plusieurs intervalles, on dit que *f* est dérivable <u>sur</u> *D* pour exprimer qu'elle est dérivable sur tous les intervalles qui constituent *D*.

- *f* est une fonction définie sur un intervalle I.
  f peut ne pas être pas être dérivable en certains réels.
  Dans ce cas-là, l'ensemble de dérivabilité de *f* est plus petit que l'ensemble de définition de *f* (cas de la fonction racine carrée définie sur $[0\,;+\infty[$ mais dérivable sur $]0\,;+\infty[$).
.

III. <u>Formules de dérivées des fonctions de référence</u>

1°) Tableau à savoir par cœur (admis sans démonstration)

	$f(x)=$	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	$f'(x)=$
L₁	k (k réel fixé)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
L₂	x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	1
L₃	x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
L₄	x^3	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
L₅	$x^n \ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
L₆	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
L₇	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$
L₈	$\dfrac{1}{x^n}\ (n\in\mathbb{N})$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$

2°) Commentaires

• L_1 donne la **dérivée d'une fonction constante**.

Toute fonction constante est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée la fonction constante nulle.

Exemple :

$f(x) = 10$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 0$

• Les résultats des lignes L_5 et L_8 sont admis. Ils généralisent les résultats pour les fonctions carré, cube et inverse.

Par exemple, pour $n = 5$.

$f(x) = x^5$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 5x^4$

• En langage parlé, on dira que « x en dérivée donne 1 », que « x^2 en dérivée donne $2x$ », que « x^3 en dérivée donne $3x^2$ » etc.

• Les colonnes du milieu sont importantes ; elles donnent pour chaque fonction l'ensemble de définition et de dérivabilité de chaque fonction.

IV. Tangentes

(On repasse dans le cadre géométrique).

1°) Propriété

> ***f* est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.**
> **$\mathcal{C}_f$ admet en tout point d'abscisse $a \in \mathrm{I}$ une tangente (non parallèle à l'axe des ordonnées) d'équation**
> $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

a : abscisse du point de contact
$f(a)$: image de a par f
$f'(a)$: nombre dérivé de f en a ou <u>image de a</u> par la fonction dérivée f'.
(dans une équation de droite, il y a toujours x et y)

Rappel : en tout point, il y a <u>une seule</u> tangente.

2°) Retour sur la dérivée d'une fonction constante

Une fonction constante est représentée graphiquement par une droite parallèle à l'axe des abscisses.
Il y a donc une tangente en tout point confondue avec la droite.
Le coefficient directeur de cette tangente est égale à celui de la droite et vaut donc 0.

3°) Exemple

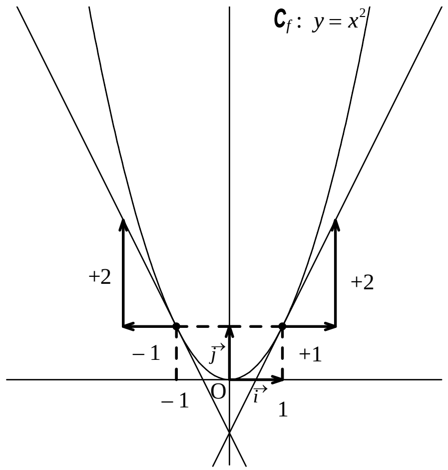
$f : x \mapsto x^2$
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 2x$

On a par exemple : $f'(1) = 2$, $f'(0) = 0$, $f'(-1) = -2$

Graphiquement, cela permet de construire les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses 1, 0, – 1.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 2.
La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur 0.
La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse – 1 a pour coefficient directeur – 2.



V. Applications

Fonction dérivée

Prendre la valeur en un réel x_0 → **Nombre dérivé de *f* en x_0**
Coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x_0
(voir exercices de ce chapitre)

Etudier le signe → **Variations de la fonction *f***
(voir chapitre 21)

COMMENTAIRES

Du nombre dérivé à la fonction dérivée

Difficulté de la notation $f'(a)$: on n'a pas défini de fonction *f'* ; pour nous c'était une notation à comprendre d'un bloc.

Remarques d'élèves à propos du tableau des dérivées :
« Tu laisses tomber la partie du milieu (les $\mathbb{R}$, les $\mathbb{R}^*$…) ; vous êtes d'accord, Monsieur, ça sert à rien. »

Une autre explication pour se souvenir des dérivées.

Pour trouver une dérivée, par exemple :

$x^2 \rightarrow$ on met juste le 2 devant le x
$x^2 \Rightarrow 2x$

Ou encore $x^3 \rightarrow$ on met juste le 3 devant le x et au-dessus on fait une soustraction c'est-à-dire

$x^3 = 3x^{3\text{-}1} \Rightarrow 3x^2$ qui est la dérivée de x^3

Remarque de Mac :

$L_8 \Rightarrow \quad f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$.

On calcule avec le résultat final et x^n.

Peut-être pour que ce soit plus clair commencer par donner dans plusieurs paragraphes

Dérivée d'une fonction constante.

Dérivée de la fonction x donne 1.

Dérivée de la fonction carrée.

etc.

Une présentation qui est peut-être bien :

Fonction initiale *f*

x	–2	–1	0,5	1	3
$f'(x)$	4	1	0,25	1	9

Nouvelle fonction *f'*

x	–2	–1	0,5	1	3
$f'(x)$	–4	–2	1	2	6

Remarque :

La dérivée de toutes les fonctions donne chaque fois du x sauf pour les fonctions constantes et pour la fonction x.

Commentaires 1ère S2 Lundi 8 décembre 2008

• Cette année on ne va pas faire de dérivée de dérivée (dérivée de dérivée c'est-à-dire dérivée seconde l'année prochaine).
Cette année nous ne ferons que des **dérivées premières**.

• On verra l'année prochaine une fonction dont la dérivée est égale à la fonction elle-même.

• Il y a deux fonctions.

Fonction normale de départ $\rightarrow$ fonction dérivée

On ne s'intéressera pas à la représentation graphique de la fonction dérivée.

En langage élève, on peut dire que « le dérivé de x c'est 1 ».

Benjamin Dechatre (décembre 2008)

Un dérivé peut correspondre à plusieurs nombres.

$0 \rightarrow \dfrac{3}{4}, 2, 9, 22, \dfrac{5}{2}, \dfrac{\pi}{3}$