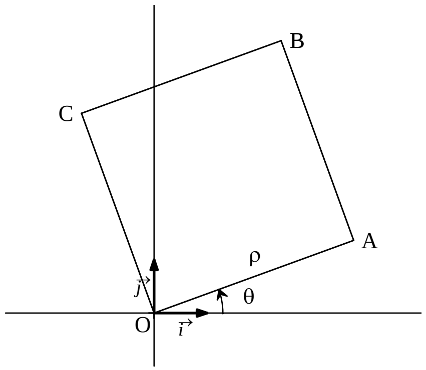
1$^{\text{ère}}$ S3

Devoir pour le lundi 7 décembre 2009

Dans les exercices I à III, le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I. On considère la courbe Γ d'équation $y = \sqrt{x+2}$.
Déterminer un système de coordonnées polaires de chacun des points A, B, C, D, E de Γ d'abscisses respectives –2, –1, 0, 1, 2.
On rédigera uniquement pour le point A. On se contentera de donner les réponses pour les autres points sans justifier.

II. On considère un point A distinct de O admettant pour coordonnées polaires $(\rho\ ;\ \theta)$. Soit B et C les points tels que le quadrilatère OABC soit un carré direct.



Donner, en fonction de ρ et θ, un système de coordonnées polaires de B et C.

III. On considère les points A, B, C admettant respectivement les couples $\left(1\,;\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(1\,;-\frac{5\pi}{6}\right)$, $\left(1\,;-\frac{\pi}{6}\right)$ pour systèmes de coordonnées polaires.
1°) Faire une figure. On prendra 4 centimètres pour unité graphique.
2°) Calculer les coordonnées cartésiennes de A, B, C.
3°) Soit D le barycentre des points pondérés (A ; 2), $(\text{B}\,;-1)$ et $(\text{C}\,;2)$.
Calculer les coordonnées cartésiennes de D ; déterminer un système de coordonnées polaires de D.
En déduire que D appartient au cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

IV. Démontrer que pour tout réel *x*, on a :
$(1+\cos x+\sin x)^2 = 2(1+\cos x)(1+\sin x)$.

V. Dans le plan orienté, on considère cinq points A, B, C, D, E tels que l'on ait :
$\left(\overrightarrow{\text{BA}}\,;\overrightarrow{\text{BC}}\right) = -\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$; $\left(\overrightarrow{\text{CB}}\,;\overrightarrow{\text{CD}}\right) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$; $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{DE}}$ sont colinéaires et de même sens ; B distinct de A et C ; D distinct de C et E.
1°) Faire une figure en indiquant notamment les mesures des angles orientés données dans l'énoncé (notation conventionnelle avec une petite flèche). On utilisera le rapporteur.
On prendra la droite (AB) « horizontale » avec A « à gauche » de B.
Ecrire les hypothèses.
On dit que ABCDE est une « ligne brisée ouverte ».
2°) Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{DC}}\,;\overrightarrow{\text{DE}}\right)$.

VI. Cet exercice est un travail informatique sur *Geogebra*.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Cet exercice est un travail informatique sur *Geogebra*

1$^{\text{er}}$ travail

1°) Dans *Saisie*, commencer par définir la fonction f : $f(x) = x \wedge 2$. Appuyer *Entrée*.
(Pour l'exposant, utiliser la touche avec le chapeau : ^). La courbe $\mathcal{C}$ de f apparaît à l'écran.
2°) Dans *Saisie*, définir le point A de coordonnées : A = (1, 1) (attention à bien respecter le signe égal et la virgule).
3°) Définir un point M sur la courbe : pour cela, aller dans *Nouveau point* et cliquer sur la courbe. Un point B apparaît alors un point B sur la courbe. Cliquer sur le point afin de le renommer M.
4°) Définir alors la droite (AM).
Il y a deux possibilités :
- 1$^{\text{ère}}$ possibilité : grâce à la commande *Droite passant par deux points*. Pour cela, cliquer sur chacun des deux points. La droite (AM) est alors automatiquement nommée *a*. Cliquer dessus pour la renommer *d*.
- 2$^{\text{e}}$ possibilité : dans *Saisie*, taper *d* = Droite[A,M].
5°) Dans *Saisie*, taper *T* = Tangente[A,f] afin de définir la tangente en A. Cliquer dessus afin de la mettre en couleur.
6°) Cliquer sur l'icône *Déplacer* afin de faire bouger le point M sur la courbe $\mathcal{C}$.
Qu'observe-t-on pour la droite (AM) (nommée *d*) lorsque M se rapproche du point A ?

2e travail

Effacer les éléments de la figure précédente à l'exception de la courbe.
1°) A l'aide de la commande *Nouveau point*, définir un point A sur la courbe.
2°) Définir la tangente *T* en A à la courbe.
3°) Faire bouger le point A sur la courbe à l'aide de la commande *Déplacer*.
4°) Faire un clic droit sur la tangente. Mettre *Trace activée*.
5°) Déplacer alors le points A sur la courbe.
On visualise l'ensemble des tangentes de la courbe.
La courbe **C** apparaît comme l'« enveloppe » de ses tangentes c'est-à-dire que les tangentes permettent de « reconstituer » intégralement la courbe **C**.
Ce point de vue permet de comprendre un peu l'intérêt des tangentes à une courbe.

1$^{\text{ère}}$ S3 **Corrigé du devoir pour le 7 décembre 2008**

I. $A(2;\pi)$, $B\left(\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right)$, $C\left(\sqrt{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$, $E\left(2\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)$

On rédige pour un point à fond. On met directement les résultats pour les quatre autres.

II.

$OB = OA\times\sqrt{2} = \rho\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré)

$\left(\vec{i};\overrightarrow{OB}\right) = \left(\vec{i};\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) = \theta+\frac{\pi}{4}\quad(2\pi)$

B admet donc pour système de coordonnées polaires le couple $\left(\rho\sqrt{2};\theta+\frac{\pi}{4}\right)$.

$OC = OA = \rho$

$\left(\vec{i};\overrightarrow{OC}\right) = \left(\vec{i};\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right) = \theta+\frac{\pi}{2}\quad(2\pi)$

C admet donc pour système de coordonnées polaires le couple $\left(\rho;\theta+\frac{\pi}{2}\right)$.

III.

2°) $A(0;1)$, $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

3°) $(A,2)$, $(B,-1)$ et $(C,2)$.

$$\begin{cases} x_D = \dfrac{2x_A - x_B + 2x_C}{3} \\ y_D = \dfrac{2y_A - y_B + 2y_C}{3} \end{cases}$$ (formule des coordonnées d'un barycentre)

$$\begin{cases} x_D = \dfrac{2\times 0+\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{3} \\ y_D = \dfrac{2\times 1-\left(-\frac{1}{2}\right)+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_D = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}}{3} \\ y_D = \dfrac{2\times 1-\left(-\frac{1}{2}\right)+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_D = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y_D = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

D a pour coordonnées cartésiennes $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.

On a : $\begin{cases} x_D = \cos\frac{\pi}{6} \\ y_D = \sin\frac{\pi}{6} \end{cases}$

D admet le couple $\left(1;\frac{\pi}{6}\right)$ pour couple de coordonnées polaires.

On en déduit que OD = 1 donc D appartient au cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

N.B. : On peut même dire que D est le point diamétralement opposé à C sur $\mathcal{C}$.

IV. Démontrons que pour tout réel x, on a : $(1+\cos x+\sin x)^2 = 2(1+\cos x)(1+\sin x)$.

Posons : $A=(1+\cos x+\sin x)^2$ et $B=2(1+\cos x)(1+\sin x)$.

$$A = 1+\underbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}_{1}+2\cos x+2\sin x+2\cos x\,\sin x = 2+2\cos x+2\sin x+2\cos x\,\sin x$$

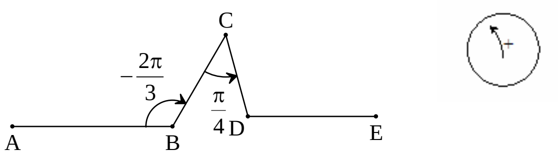
développement de $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$$B = 2(1+\cos x)(1+\sin x) = 2(1+\sin x+\cos x+\cos x\,\sin x) = 2+2\cos x+2\sin x+2\cos x\,\sin x$$

On en déduit que $A = B$.

Donc pour tout réel x, on a : $\boxed{(1+\cos x+\sin x)^2 = 2(1+\cos x)(1+\sin x)}$.

V. 1°)



2°) On applique la relation de Chasles pour les angles orientés.

$$\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DE}\right)=\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{DE}\right)\quad(2\pi)$$

$$\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DE}\right)=\left(-\overrightarrow{CD}\,;-\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{DE}\right)\quad(2\pi)$$

$$\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DE}\right)=\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{DE}\right)\quad(2\pi)$$

$$\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DE}\right)=-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}+\pi\quad(2\pi)$$

$$\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DE}\right)=\frac{-3\pi+8\pi+12\pi}{12}\quad(2\pi)$$

$$\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DE}\right)=\frac{17\pi}{12}\quad(2\pi)$$

On peut donner une mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DE}\right)$.

$$\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DE}\right)=\frac{17\pi}{12}-2\pi\ (2\pi)$$

$$\boxed{\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DE}\right)=-\frac{7\pi}{12}\ (2\pi)}$$

$-\frac{7\pi}{12}$ est la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DE}\right)$.