$1^{ère}$ S Chapitre 18 Nombre dérivé d'une fonction

I. Introduction

1°) Difficultés du chapitre

- un peu abstrait au début
- calcul algébrique
- assimiler les notions et le vocabulaire

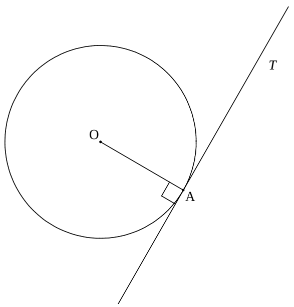
2°) Motivations du chapitre

Notion de tangente à une courbe

tangente en un point

un cercle
(perpendiculaire au rayon)

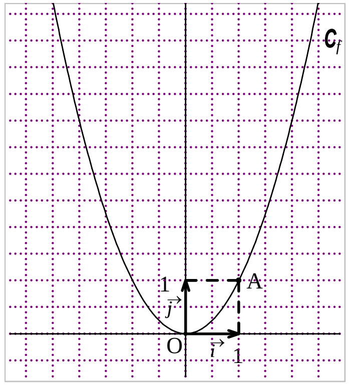
une courbe
(parabole/hyperbole)



II. Etude d'un exemple concret

1°) Hypothèses

$f : x \mapsto x^2$
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$



Le but est de définir la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A (1 ; 1) (qui est sur la courbe $\mathcal{C}_f$).

Le problème est complexe. Nous n'allons pas l'aborder de front mais nous allons utiliser un moyen détourné en reprenant l'idée de mathématiciens du XVII^{e} siècle ; il s'agit de la méthode des « droites qui tournent ».
Ce moyen déroutant de prime abord sert uniquement à présenter la notion de tangente. Il ne sera jamais mis en œuvre en exercice.
Il est tout à fait normal de ne pas tout comprendre la première fois.

Il y a deux étapes :
- compréhension de la démarche ;
- mathématisation du problème (plus difficile car mettant en jeu le langage et les écritures mathématiques)

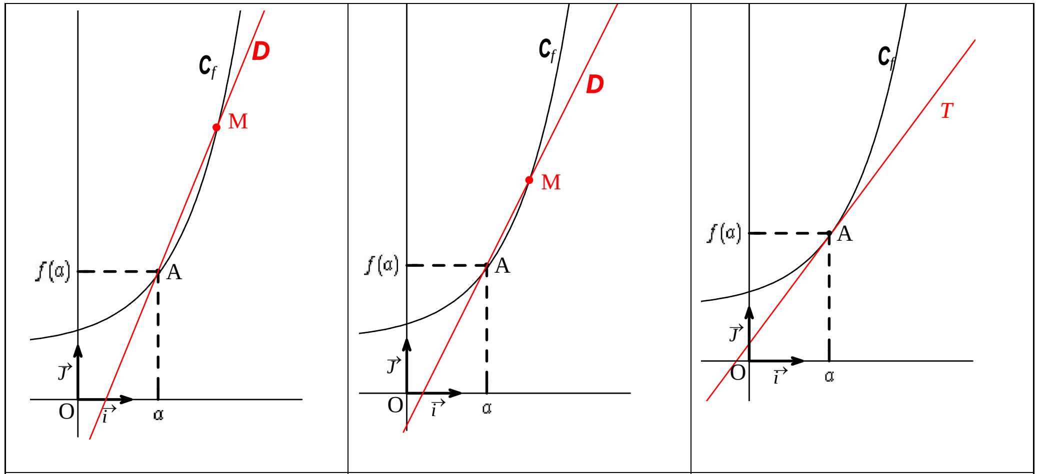
2°) Cadre général : petit scénario pour comprendre la démarche

Notion intuitive : **idée de tangente** (Fermat XVII^e siècle).

Le mot **tangente** vient du mot latin *tangente* qui signifie « toucher ».
D'ailleurs, au XVIIe siècle, on employait le mot de « touchante » pour désigner ce que nous appelons aujourd'hui la tangente en un point à une courbe.

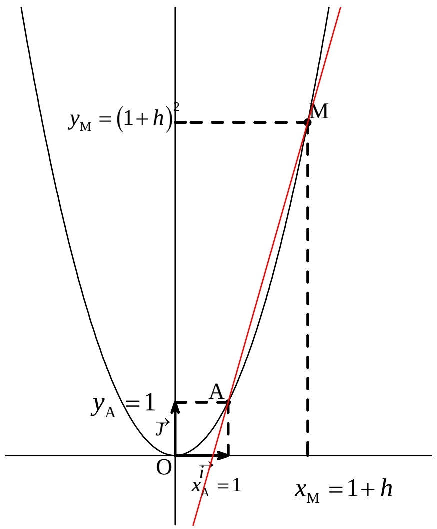
On peut avoir l'impression que l'on complique le problème mais c'est une fausse impression.

On va utiliser une méthode mécanique qui consiste à faire bouger un point sur une courbe.



$\mathcal{D} = (\mathrm{AM})$ est sécante à la courbe.	On fait se rapprocher M de A. La droite $\mathcal{D}$ « bouge ».	La droite $\mathcal{D}$ tend à être tangente en A à la courbe.

3°) Reprise de l'exemple



Utilisation de *Geoplan* (logiciel de géométrie dynamique). Evidemment au XVII^e siècle, les mathématiciens ne disposaient pas d'ordinateur pour visualiser. Comment faisaient-ils ? Ils imaginaient dans leur tête (démarche mentale) ou ils faisaient à la main. Ils étaient souvent très astucieux.

$$\mathrm{A}\left|\begin{array}{l} x_A = 1 \\ y_A = 1 \end{array}\right.$$

$$\mathrm{M}\left|\begin{array}{l} x_M = 1+h \\ y_M = (1+h)^2 = 1+2h+h^2 \end{array}\right. \quad \text{avec } h \neq 0.$$

On pose $\mathcal{D} = (\mathrm{AM})$.

On va faire bouger le point M c'est-à-dire le réel h.

Calcul du coefficient directeur de $\mathcal{D}$ (calcul littéral en fonction de h)

$$t(h) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{1+2h+h^2-1}{1+h-1} = \frac{2h+h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}} = 2+h \quad (h \neq 0)$$

Les h « s'évanouissent »

N.B. : On peut aussi calculer à part Δx et Δy.

Etude du coefficient directeur de $\mathcal{D}$ quand « h tend vers 0 »

Première approche

$t(h) = h+2$ (pour $h \neq 0$)

On aurait envie d'écrire $t(0)$ mais on ne peut pas l'écrire car $t(h)$ n'existe que pour $h \neq 0$.

Pour remédier à ce problème, on va faire intervenir un concept difficile (mais que nous allons appliquer de manière simple) : <u>le concept de limite</u>.

h ne peut pas être égal à 0 mais on peut faire tendre h vers 0 (h se rapproche de 0 sans jamais être égal à 0).

Dans notre tête, on va faire $h = 0$ en remplaçant h par 0 dans l'expression de $t(h)$ mais on va écrire :

$\boxed{\lim\limits_{h \to 0} t(h) = 2}$ ← nombre fixe qui ne dépend pas de h

$\lim\limits_{h \to 0} t(h) = 2$ ($h \to 0$: "tend vers 0" flèche sans talon)

($h \to 0$ doit être entièrement contenu sous le symbole lim).

Remarque :
La notation « lim » n'est pas une abréviation ; c'est une vraie notation mathématique.

Tableau

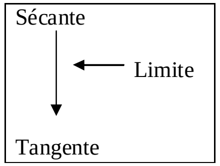
h	0,1	0,01	0,001	…
$t(h)$	2,1	2,01	2,001	…

Pour faire tendre h vers 0, on est obligé de donner à h des valeurs de plus en plus proches de 0 (mais pas 0).
On ne peut pas donner à h des valeurs régulièrement espacées, par exemple de 2 en 2, car sinon à un moment M sera confondu avec A.

N.B. :

- Pour passer à la tangente, on est obligé de faire intervenir le **concept de limite**.
- Ce concept ne sera pas approfondi cette année. Cette notation ne sera donc utilisée qu'à cet endroit du cours pour permettre de comprendre l'origine du nombre dérivé.

Schéma



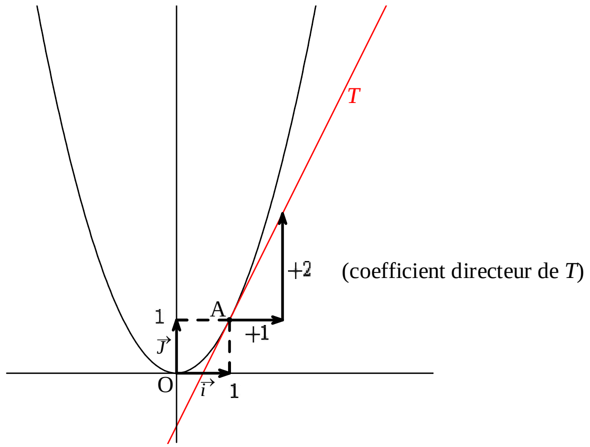
Interprétation graphique

Lorsque M se rapproche de plus en plus de A (c'est-à-dire lorsque h tend vers 0), la droite $\mathcal{D}$ passe toujours par A, mais son coefficient directeur tend vers 2.
Autrement dit lorsque h tend vers 0, la droite $\mathcal{D}$ (variable) se rapproche de plus en plus de la droite T (fixe) qui passe par A et qui a pour coefficient directeur 2.

Cette droite est entièrement définie ; on dit que c'est <u>la</u> tangente <u>en</u> A <u>à</u> $\mathcal{C}$.

On oublie alors la droite (AM) et on peut donc tracer la tangente (en rouge) grâce à la « méthode des carreaux » (construction d'une droite connaissant un point par lequel elle passe et son coefficient directeur).

Tracé

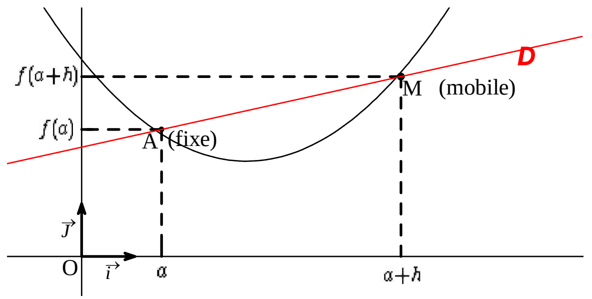


Nous admettrons que la démarche décrite ici pour la courbe particulière de la fonction carrée et pour le point particulier A d'abscisse 1 reste valable pour tous les autres points de la courbe : pour chaque point de la courbe on peut trouver par la même démarche et par le même type de calcul un coefficient directeur de la tangente. Pour le point d'abscisse 1, on trouve que la tangente a pour coefficient directeur 2 mais pour un autre point on trouvera un coefficient directeur différent.

Le coefficient directeur de la tangente sera chaque fois différent ; il dépend de l'abscisse du point auquel on s'intéresse.

Enfin, cette démarche s'applique pour les courbes de n'importe quelle fonction.

4°) Retour au cas général



M ≠ A
$\mathcal{D} = (\text{AM})$.

$$A \left| \begin{array}{l} x_A = a \\ y_A = f(a) \end{array} \right.$$

$$M \left| \begin{array}{l} x_M = a+h \\ y_M = f(a+h) \end{array} \right.$$ avec $h \neq 0$ (a fixe, h variable).

$M \neq A$

Le coefficient directeur de $\boldsymbol{D}$ (sous forme littérale) est égal à

$$t(h) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (h \neq 0)$$

(Mêmes calculs : on a juste changé le 1 en *a*).

III. <u>Fonction dérivable en un réel</u>

1°) Définition (fonction dérivable en un réel ; nombre dérivé)

I est un intervalle.
f est une fonction définie sur I.
a est un réel fixé dans I.

• On dit que *f* est **dérivable <u>en</u> *a*** pour exprimer que la limite de $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ lorsque *h* tend vers 0 (c'est-à-dire devient tout petit ; $h = 0{,}1$, $h = 0{,}01$, $h = 0{,}001$ … sans jamais être égal à 0) est un nombre (fixé).
• Le résultat de cette limite est appelée **le nombre dérivé** de *f* <u>en</u> *a*.
• On le note $f'(a)$ (notation de Lagrange).

2°) Remarques

$f(a)$ et $f'(a)$ sont deux nombres différents.

$f(a)$: image de *a* par *f*
$f'(a)$: nombre dérivé de *f* en *a* (le résultat peut être positif ou négatif)

Il importe de bien voir la notation $f'(a)$ uniquement comme une notation globale et comme l'image de *a* par une fonction *f*' (qui pas encore été définie).
Nous verrons cependant dans le chapitre qu'il est effectivement possible de définir une fonction *f*' ce qui nous permettra de réinterpréter la notation $f'(a)$ comme image de a par la fonction *f*'.

3°) Vocabulaire

$\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ s'appelle **le taux de variation** de *f* entre *a* et *a*+*h*.

4°) Exemple

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

$a = 1$

f est-elle dérivable en 1 ?

On pose $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{(1+h)^2 - 1}{h} = \dfrac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \dfrac{2h + h^2}{h} = \dfrac{\cancel{h}(1+2h)}{\cancel{h}} = 2 + h \quad (h \neq 0)$

$\lim\limits_{h \to 0} (2+h) = 2$

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2$

Donc on peut dire que *f* est dérivable en 1 et que le nombre de dérivé de *f* en 1 est égal à 2
On écrit $f'(1) = 2$.

N.B. :

Bien noter que l'on ne peut pas calculer directement $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ car sinon on obtiendrait le quotient $\dfrac{0}{0}$ qui n'existe pas. D'où la nécessité de transformer, de simplifier le quotient avant de faire la limite.

IV. <u>Tangente à une courbe</u>

1°) Définition (tangente)

I est un intervalle.
f est une fonction définie sur I et *a* un réel fixé de I.
A est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse *a* $\left(A\left(a\,;f(a)\right)\right)$.
Lorsque *f* est dérivable en *a*, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet pour **tangente** *T*, en A, <u>la</u> droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

2°) Conséquence directe

Par définition, $f'(a)$ = **coefficient directeur** de la tangente *T* au point d'abscisse *a*.

nombre dérivé de *f* en *a*

3°) Méthode pour tracer la tangente

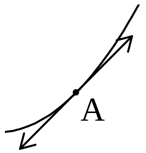
On utilise le coefficient directeur qui est égal au nombre dérivé.

Exemple

$f : x \mapsto x^2$

On a vu au **III. 3°)** que *f* est dérivable en 1 et que $f'(1) = 2$.
Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente *T* au point A d'abscisse 1 de coefficient directeur $f'(1) = 2$.
A est le **point de contact** ou **point de tangence**.

4°) Représentation conventionnelle



5°) Equation de la tangente

● **Formule**

Une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a s'écrit $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

● **Commentaires**

a : abscisse du point de contact
$f(a)$: image de a par f
$f'(a)$: nombre dérivé de f en a (le résultat peut être positif ou négatif)
(dans une équation de droite, il y a toujours x et y)

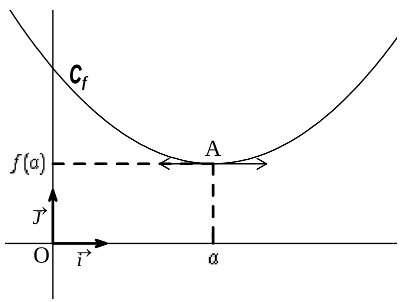
En chaque point, il n'y a qu'une seule tangente !

● **Démonstration**

$T : y = mx + p$
Or $m = f'(a)$ donc l'équation réduite de T s'écrit : $y = f'(a)x + p$.
De plus, le point $A(a\,;f(a)) \in T$ donc $f(a) = f'(a)a + p$ d'où $p = f(a) - f'(a)a$.
Par conséquent, l'équation réduite de T s'écrit $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$.
On peut donc écrire cette équation sous la forme : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

6°) Tangente horizontale ou parallèle à l'axe des abscisses

Son coefficient directeur est égal à 0.
D'où $f'(a) = 0$ =0.



VI. Nombres dérivés des fonctions de référence

1°) Tableau

$f(x) =$	**Taux de variation** $\tau(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $(a \in D_f)$	**Nombre dérivé** $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \tau(h)$
k (k réel fixé)	0	0
x	1	1
x^2	$2a+h$	$2a$
x^3	$3a^2+3ah+h^2$	$3a^2$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{a(a+h)}$	$-\dfrac{1}{a^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ $(a>0)$

2°) Justification de la deuxième colonne

• $f(x) = k$

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0$$

• $f(x) = x$

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)-a}{h} = 1$$

• $f(x) = x^2$

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{(a^2+2ah+h^2)-a^2}{h} = 2a+h$$

• $f(x) = x^3$

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^3-a^3}{h} = \frac{(a^3+3a^2h+3ah^2+h^3)-a^3}{h} = 3a^2+3ah+h^2$$

- $f(x)=\dfrac{1}{x} \quad \left(a\in\mathbb{R}^*\right)$

$$\tau(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h}=\frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h}=\frac{-\cancel{h}}{a(a+h)}\times\frac{1}{\cancel{h}}=-\frac{1}{a(a+h)}$$

- $f(x)=\sqrt{x} \quad \left(a\in\mathbb{R}_+\right)$

$$\tau(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\frac{\left(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}=\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}=\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

Cas où $a=0$

Pour la première fois, on va écrire une égalité dans laquelle vont intervenir des infinis.

3°) Justification de la 3^e^ colonne

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\tau(h)$$

VII. <u>Rappels sur les équations de droites</u>

1°) Equations réduites (2 familles de droites)
Le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.
D est une droite.

1$^{\text{er}}$ cas : *D* n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

D admet une équation réduite de la forme $y=\boxed{m}\,x+\boxed{p}$

coefficient directeur (ou **pente** si le repère est orthonormé)

ordonnée à l'origine

2$^{\text{e}}$ cas : *D* est parallèle à l'axe des ordonnées
D admet une équation réduite de la forme droite $x=k$.

2°) Un point sur lequel il convient d'insister particulièrement (et qui, malheureusement n'est souvent pas signalé aux élèves)

Le mot **« équation »** est ici trompeur.
En effet le mot « équation » n'est pas employé au sens usuel où l'on doit trouver les valeurs de l'inconnue pour rendre vraie une égalité.

Il s'agit ici d'une relation qui lie les coordonnées *x* et *y* d'un point quelconque de la droite.

Dire que *D* a pour équation $y=ax+b$ signifie que les coordonnées de tous les points de la droite vérifient cette relation.

Il en est de même des équations de courbe.

(Au sens strict, le mot équation ne devrait alors pas être employé seul mais sous la forme « équation de droite » ou « équation de courbe »).

Cette remarque interdit des notations telles que y_D ou $D(x)$ qui n'ont pas de signification.

3°) Lien avec les fonctions affines

On peut dire aussi que *D* est la représentation graphique de la fonction affine $f:x\mapsto ax+b$ (fonction affine associée à la droite).
Il n'est cependant en général pas nécessaire de parler de fonctions affines quand on a des équations de droite.

4°) Vecteur directeur

1$^{\text{er}}$ cas : $\vec{u}(1\,;m)$ est un vecteur directeur de *D*.
2$^{\text{e}}$ cas : $\vec{j}(0\,;1)$ est un vecteur directeur de *D*.

5°) Formule du coefficient directeur

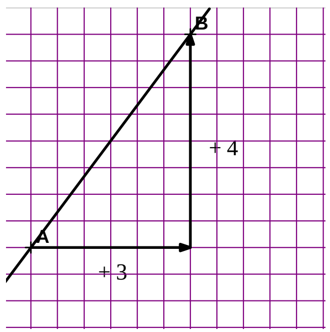
A et B sont deux points que $x_{\mathrm{A}}\neq x_{\mathrm{B}}$.

$$\boxed{m=\frac{y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}}}$$

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

6°) Quelques méthodes

• Lire graphiquement le coefficient directeur d'une droite (« méthode des carreaux »)



On prend 2 deux points du quadrillage A et B.
On fait un chemin pour aller de A à B.
Coefficient directeur $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{4}{3}$

• Lire graphiquement l'ordonnée à l'origine

• Tracer une droite passant par un point donné et de coefficient directeur donné

On utilise un vecteur directeur de la droite.

• **Déterminer l'équation réduite d'une droite**

7°) Condition de parallélisme de 2 droites

Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

8°) Equations cartésiennes

Exemple :

$3x-2y+1=0$ ⟵ équation cartésienne

$2y=3x+1$

$y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ ⟵ équation réduite

Toute droite admet une **équation cartésienne** de la forme $ax+by+c=0$ $\left((a\,;b)\neq(0\,;0)\right)$.

Une explication à moi

Donner une courbe de fonction et un point A situé dessus.
Donner également des droites qui passent par A

Parmi toutes les droites qui passent par A il y en a une qui se dégage par rapport à la courbe : la tangente au point A.

En creusant cette notion de tangente (qui peut paraître moyennement intéressante de prime abord ; qu'est-ce qu'apporte une tangente pour une courbe), on va découvrir une nouvelle notion qui va s'avérer de la plus grande importance et du plus grand intérêt pour la suite : la notion de nombre de dérivé et de fonction dérivé.

Commentaires d'élèves

A propos de la droite qui tourne : « C'est un peu mécanique. »

Faire observer aux élèves **le changement de cadre**

cadre géométrique	cadre fonctionnel
tangente	nbre dérivé

- La notion de tangente (géométrique) débouche sur l'introduction d'un concept fonctionnel : le nombre dérivé.

- Remarque d'élève assez pertinente à propos de $f'(a)$.
On ne cherche pas l'image mais le coefficient directeur.

- Tout ce qui est en *f'* a rapport avec la tangente.
« Tout ce qui est en prime a rapport avec la tangente »

Note 3 décembre 2008

Point de vocabulaire

On parle de **tangente** **au** **point A** ou de **tangente** **en** **A** à la courbe $\mathcal{C}$.

Les mots qui marchent ensemble :

Le mot **« tangente »** marche avec le mot **« courbe »** (et pas avec le mot fonction).

On calcule $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Repasser le *h* en rouge sous la limite et dans le quotient.

Supposons que l'on trouve un nombre.

Dans ce cas, on dira que la fonction *f* est dérivable <u>en *a*</u> et le nombre qu'on obtient sera noté $f'(a)$ notation globale (de Lagrange) qui signifie :
« nombre dérivé de *f* en *a* »

et non **« image de *a* par *f '* »** puisque l'on n'a pas (encore) défini de fonction *f '* !

Supposons que l'on ne trouve pas un nombre.

(On peut soit ne rien trouver du tout mais ça n'arrivera pas cette année, soit trouver un infini mais on verra ça plus tard : on peut trouver une limite qui soit égale à + l'infini ou –l 'infini).

Dans ce cas, on dira que la fonction f n'est pas dérivable en *a* et on ne pourra pas définir de nombre dérivé de *f* en *a*.

N.B. : On peut ne rien trouver ou trouver autre chose qu'un nombre (un infini par exemple, voir cours sur les limites).

On peut :

- soit trouver un résultat fini (c'est-à-dire un nombre)
- soit ne pas trouver un résultat (rarement pour nous cette année)

Dans des chapitres ultérieurs, nous verrons d'autres limites.

Rappel sur les équations de droites

1°) Une droite *D* non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y = ax + b$.

2°) Un point sur lequel il convient d'insister particulièrement (et qui, malheureusement n'est souvent pas signalé aux élèves)

Le mot **« équation »** est ici trompeur.
En effet le mot « équation » n'est pas employé au sens usuel où l'on doit trouver les valeurs de l'inconnue pour rendre vraie une égalité.

Il s'agit ici d'une relation qui lie les coordonnées *x* et *y* d'un point quelconque de la droite.

Dire que *D* a pour équation $y = ax + b$ signifie que les coordonnées de tous les points de la droite vérifient cette relation.

Il en est de même des équations de courbe.

(Au sens strict, le mot équation ne devrait alors pas être employé seul mais sous la forme « équation de droite » ou « équation de courbe »).

Cette remarque interdit des notations telles que y_D ou $D(x)$ qui n'ont pas de signification.

3°) Lien avec les fonctions affines

On peut dire aussi que *D* est la représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ (fonction affine associée à la droite).
Il n'est cependant en général pas nécessaire de parler de fonctions affines quand on a des équations de droite.

4°) Propriété

La droite passant par le point $\mathrm{A}(x_\mathrm{A} \,;\, y_\mathrm{A})$ et de coefficient directeur *m* admet pour équation $y = m(x - x_\mathrm{A}) + y_\mathrm{A}$.

On a appris à manipuler des fonctions et des courbes.

Parmi les fonctions usuelles, les fonctions les plus simples sont les fonctions affines.
Parmi les courbes de fonctions usuelles, les plus simples sont les droites.

L'idée des dérivées va être d'approcher la courbe d'une fonction quelconque par une droite <u>au voisinage d'un point</u> (c'est-à-dire qu'une courbe au voisinage d'un point, si l'on fait des zooms, ressemble à une droite) et d'approcher une fonction quelconque par une fonction affine au voisinage d'un réel.

Déroulement de ma séance (décembre 2008)

I. <u>L'idée de tangente</u>

Tangere : toucher.

En un point il y a plusieurs tangentes ?

Une tangente peut couper la courbe en un autre point.

II. <u>Equations de droites</u>

$y = a \; x + b$

C.D. O.O.

Je demande aux élèves ce que vous voudriez mettre dans ce chapitre.

- tracé (coeff. dir. ; équation)

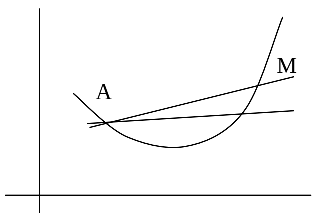
- à quoi ça sert ?

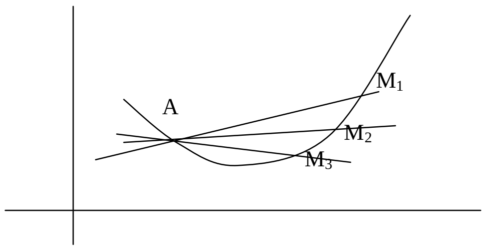
- propriétés

III. <u>CD</u>

$f'(a)$: notation globale pas de f ' (notation de Lagrange).

IV. <u>Approfondissement de l'idée de tangente</u>





On fait « tendre » h vers 0.

M à gauche si h <0.

Année scolaire 2009 – 2010

Le cycle des dérivées

1ère séance : mercredi 2 décembre 2008

I. <u>Le mot « tangente » a plusieurs sens.</u>

1°) C'est un nom commun.

- tangente à un cercle
- tangente d'un réel ou d'un angle dans un triangle rectangle (ce n'est pas cela qui va nous intéresser dans ce cours).

2°) C'est un adjectif.

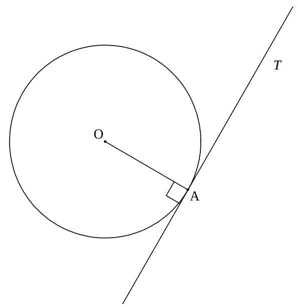
On dit que le cercle est tangent à la droite ou la droite est tangente au cercle.
On dit que deux cercles sont tangents l'un à l'autre (extérieurement ou intérieurement).

II. <u>L'idée de tangente ; la notion de tangente</u>

<u>Tangente à un cercle</u>

1°) Rappel de la définition

La tangente à un cercle en un point est la droite perpendiculaire au rayon en ce point.



Construction de la tangente à un cercle. Matériel utilisé : équerre et règle non graduée.
Codage.

2°) Propriété

La tangente au cercle ne coupe celui-ci qu'en un seul point.

Attention : il n'y a pas de zone de contact ou d'intersection.
Une idée répandue : deux droites formant un petit angle ont une zone de points d'intersection.

3°) Vocabulaire

« point de contact » = « point de tangence »

4°) A quoi sert la tangente

Il n'est pas évident de répondre à la question.

Une histoire romantique : problème de Roméo et Juliette (au temps où l'on voyageait par mer)

Mont-Blanc : voit-on la mer ? Non, Horace-Bénédict de Saussure et Jacques Balmat en 1787.
Pierre de Saussure connaissait sûrement la mer ; c'est moins sûr pour Jacques Balmat, savoyard de souche, qui a dû mourir sans jamais avoir vu la mer.

Au XVII^{e} et XVIII^{e} siècle, on ne s'aventurait pas sur les sommets. D'une part, parce que l'on n'avait pas le matériel (les premières expéditions furent périlleuses). D'autre part et surtout parce que l'on avait peur : on croyait que les montagnes étaient peuplées de créatures merveilleuses. Les sommets étaient des domaines où l'on ne pouvait pas s'aventurer sans courir de danger. Après la première expédition, on attendait avec une impatience les récits des aventuriers qui déçurent leur auditoire lorsque ils dirent ne rien avoir vu à part des paysages de glace effrayants et périlleux. Seuls s'y aventuraient au péril de leur vie les cristaliers (chercheurs de cristaux de roche) qui n'hésitaient pas à raconter des histoires imaginaires propres à alimenter les peurs.
Le Mont-Blanc était appelé Mont Maudit.

Au XVIII^{e} siècle, siècle des Lumières, on essaie de repousser les limites de la connaissance dans tous les domaines (géographie, histoire naturelle, physique…)

Phénomène de la courbure terrestre.
La rotondité de la terre (conception antique de la Terre : un disque de part et d'autres coulent les eaux qui descendent dans les zones inférieures où séjournent les morts (*infernum* qui a donné le mot « enfer »).
La courbure de la terre empêche de voir la mer Méditerranée.

En quelque point où l'on se trouve on ne peut jamais voir un solide opaque tout entier (on n'en voit toujours qu'une partie). C'est faux pour un solide transparent.

Phénomène d'aplatissement de la terre aux pôles.

Phénomène d'Albédo (capacité d'un corps à retenir la lumière : la neige a un albédo plus grand que l'eau).

Obliquité de la terre.

Evidemment, s'il y a de la brume, la visibilité sera réduite. En bord de mer, on a une visibilité d'environ 18 km.

A quoi sert la tangente à un cercle ?

Déjà, il faut savoir ce que veut dire « servir » ; « servir » veut dire « utile en mathématiques ».

- problème de la ligne d'horizon
- roue qui roule sur le sol supposé parfaitement plan.

La réponse n'est pas évidente. Je n'ai pas trouvé de réponse convaincante.
La notion de tangente c'est une notion utile quand on veut parler de la droite perpendiculaire au rayon.

Ce qui va nous intéresser, ce n'est pas la tangente à un cercle.
Objectif du chapitre.

III. <u>Tangente à une courbe qui n'est pas un cercle. Exemple : la parabole</u>

1°) Obstacles et difficultés

Ce qui change entre un cercle et une parabole :

Problème du passage de la tangente à un cercle à la tangente à une parabole

2°) L'idée de Fermat : « les droites qui tournent »

Pierre de Fermat, mathématicien du XVII^{e} siècle.

L'idée de Fermat : faire tourner une droite autour d'un point.

J'ouvre deux fenêtres *Geogebra*.

Pour un cercle	**Pour une parabole**
Dans le plan	Dans le plan muni d'un repère
Perpendiculaire au rayon en un point Visualisation avec *Geogebra*	? Une parabole n'a ni centre ni rayon
Droite qui coupe le cercle en un seul point Visualisation avec *Geogebra* aussi	Droite qui coupe la courbe en un seul point Problème : non généralisable à d'autres courbes
Position limite des sécantes Visualisation avec *Geogebra* Création de la droite mobile (« droite qui tourne »)	Position limite des sécantes Intérêt : généralisable à toutes les autres courbes Visualisation avec Geogebra (« droite qui tourne »)

Pour la tangente à un cercle, je cache les axes du repère.

Visualisation de la Commande « Tangente[a,f] » ou « Tangente[A,C] » avec *Geogebra*.

Lorsque le point M se rapproche du point A, <u>l'angle entre la droite (AM) et la tangente diminue</u>.

La méthode s'adapte pour d'autres courbes (par exemple, l'hyperbole représentative de la fonction inverse).

IV. <u>Origine du mot « tangente »</u>

1°) Etymologie

Tangente < *tangere* en latin, qui signifie « toucher »

2°) Remarque historique

Au XVII^{e} siècle, on ne parlait pas de « tangente » mais de **« touchante »**.

V. <u>Vocabulaire</u>

1°) Corde

2°) Sécantes

On a vu la notion de « corde » d'un cercle en 6^{e} (et même à l'école primaire).
Dans un cercle, une corde est un segment joignant deux points de ce cercle.

En $1^{\text{ère}}$, la notion est un peu étendue pour une courbe : la droite joignant deux points d'une courbe est appelée une corde. On parlera aussi de « sécante à la courbe ».

V. <u>Bilan de cette séance</u>

1°) Ce qui a été vu

2°) Ce qu'a apporté le logiciel

3°) Ce qui reste à préciser

A la fin de la séance, les élèves doivent avoir compris la notion de tangente.
- La tangente est une droite attachée à la courbe en un point.
- La courbe vient « longer » la tangente.
- On a lutté contre les idées fausses. La tangente peut recouper la courbe en un ou plusieurs autres points.

Vous ne saurez pas aujourd'hui ce qu'est une dérivée ou un nombre dérivé.

Annexe : énoncé du DM de narration de recherche

DM « Cœur-brisé »

« Vous venez de plaquer l'ex-amour (Georgette) de votre vie !
Vous l'abandonnez sur la jetée (altitude de ses yeux humides : 4 m) et ramez irrésistiblement vers le large (altitude de vos yeux impitoyables : 1 m).
A quelle distance du rivage échapperez-vous à son regard déchirant en disparaissant de son horizon ?

2^{e} séance : mathématisation du problème

On repart de la notion de TANGENTE.

Souligner l'orthographe du terme.

On va mathématiser le problème.

Visualisation d'une courbe comme enveloppe des tangentes.
Fonction trace avec *Geogebra*.

3^{e} séance : mise en place de la notion de limite