TS Exercices sur les fonctions puissances et racines nièmes

1 Calculer sans utiliser la calculatrice en détaillant les étapes de calcul.

$A=\sqrt[4]{5}\times\sqrt[4]{125}$; $B=5^{\frac{2}{3}}\times\sqrt[6]{25}$; $C=\sqrt[5]{81}\times 3^{\frac{1}{5}}$.

2 1°) Développer $\left(2+\sqrt{2}\right)^3$ et $\left(2-\sqrt{2}\right)^3$.

2°) En déduire la valeur exacte de $A=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}-\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

3 Soit a un réel strictement positif. Simplifier $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^5}\times\left(\sqrt[4]{a^7}\right)^2}{\left(a^2\right)^2\times\sqrt[5]{a^2}\times\sqrt[5]{a^3}}$.

4 Calculer $A=\dfrac{27^{-\frac{2}{3}}\times 49^{\frac{1}{2}}\times 16^{\frac{5}{4}}}{\left(\sqrt[5]{243}\right)^2}$.

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt[3]{5-2x}=2$.

On commencera par préciser le domaine de résolution de l'équation.

6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}-2=0$.

On commencera par préciser le domaine de résolution de l'équation.

7 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f : $x\mapsto\sqrt[3]{1+x^2}$; justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.

8 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f : $x\mapsto x^{\frac{2}{3}}\ln x$; justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.

9 On considère la fonction f : $x\mapsto(2-x)^{-\frac{5}{3}}$.

1°) Donner l'ensemble de définition de f.

2°) Justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.

3°) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

4°) Dresser le tableau de variation de f.

10 On considère la fonction f : $x\mapsto x^3-6\ln x+1$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Donner l'ensemble de définition de f.

2°) Etudier la limite de f en 0 à droite. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?

3°) Etudier la limite de f en $+\infty$.

4°) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f ; on détaillera le signe de $f'(x)$.

Calculer l'extremum de f (valeur exacte).

5°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. En déduire que $\mathcal{C}$ présente une branche parabolique en $+\infty$ dont on précisera la direction.

6°) Faire un petit tableau de valeurs et tracer $\mathcal{C}$ en prenant 1 cm pour unité graphique.

Tracer la tangente horizontale ainsi que la tangente T au point A d'abscisse 1.

Bien mettre les pointillés en abscisse et en ordonnées **avec les valeurs exactes** au point correspondant à l'extremum.

11 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f : $x\mapsto x\times 2^x$; justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.

12 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f : $x\mapsto x^2\times 3^{-x}$; déterminer sa limite en $+\infty$.

Réponses

1 (On passe aux exposants fractionnaires) $A=5$; $B=5$; $C=3$.

2 1°) $\left(2+\sqrt{3}\right)^3=20+14\sqrt{2}$; $\left(2-\sqrt{3}\right)^3=20-14\sqrt{2}$

On rappelle que pour tout couple $(a\ ;\ b)$ de réels on a : $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ (identités cubiques à connaître).

2°) $A=2\sqrt{2}$

3 $A=\sqrt[6]{a}$ **4** $A=\dfrac{224}{81}$

5 On résout dans l'intervalle $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{5}{2}\right]$; $x=-\dfrac{3}{2}$.

Idée pour la résolution : on élève au cube les deux membres : $\left(\sqrt[3]{5-2x}\right)^3=2^3$.

6 On résout dans $\mathbb{R}_+^*$ (en effet $x^{\frac{1}{3}}=\text{e}^{\frac{1}{3}\ln x}$; la présence du logarithme népérien impose $x>0$) ; on pose $X=x^{\frac{1}{3}}$.

$X=2$ ou $X=-1$

$x=8$

Remarque : on obtient $x^{\frac{1}{3}}=-1$ soit $\text{e}^{\frac{1}{3}\ln x}=-1$ ce qui est impossible car le résultat d'une exponentielle est toujours strictement positive.

7 $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$; $f'(x)=\dfrac{2x\left(1+x^2\right)^{-\frac{2}{3}}}{3}$

8 $\mathcal{D}_f=]0\ ;+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{2\ln x+3}{3\sqrt[3]{x}}$

9 1°) $\mathcal{D}_f=]-\infty\ ;2[$

2°) f est dérivable sur $]-\infty\ ;2[$ (règle sur les composées de fonctions dérivables).

$\forall x\in]-\infty\ ;2[\quad f'(x)=\dfrac{5}{3(2-x)^{\frac{8}{3}}}$

3°) Pour les limites, on écrit : $(2-x)^{-\frac{5}{3}}=\text{e}^{-\frac{5}{3}\ln(2-x)}$. On utilise un changement de variable.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=+\infty$

4°)

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ 2
Signe de $f'(x)$	$\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\|\|$
Variations de f	$0 \nearrow +\infty$ $\|\|$

f est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 2[$.

Dans le tableau de variation, ne pas oublier de mettre une double barre sous le 2 au niveau de $f'(x)$ et de f.
Compléter le tableau avec les limites.

Remarque :

L'observation sur la calculatrice graphique de la représentation graphique de la courbe de la fonction f donne une courbe en deux morceaux, sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 2[$ et sur l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$.

La partie sur $]2\ ;\ +\infty[$ ne nous intéresse pas ; elle provient du fait que la calculatrice accepte de définir la racine cubique d'un nombre négatif ce que nous n'avons pas fait cette année (mais cela est souvent fait dans les classes supérieures).

10 1°) $f(x)$ existe si et seulement si $x>0$.

Donc $\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}_+^*$.

2°) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+} x^3=0\\ \lim\limits_{x\to0^+}(-6\ln x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to0^+}1=1\end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme, on a : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$.

La courbe $\boldsymbol{C}$ admet donc l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

3°) En $+\infty$, on rencontre une forme indéterminée du type « $+\infty-\infty$ ».
On effectue une réécriture :

$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad f(x)=x^3\left(1-6\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}\right)$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-6\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}\right)=1\end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit, on a : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$.

4°) $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad f'(x)=\dfrac{3\left(x^3-2\right)}{x}$.

On résout deux inéquations et une équation : $\sqrt[3]{x}>2$, $\sqrt[3]{x}<2$ et $\sqrt[3]{x}=2$.

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \sqrt[3]{2}\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt[3]{2};+\infty\right[$.

Dans le tableau de variation, ne pas oublier de mettre une double barre sous le 0 au niveau de $f'(x)$ et de $f(x)$. Compléter le tableau avec les limites.

x	0		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
Signe de x^3-2		$-$	0	$+$	
Signe de x	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
Variations de f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$3-2\ln2$	$\nearrow$	$+\infty$

$f\left(\sqrt[3]{2}\right)=3-2\ln2$.

$\sqrt[3]{2}=1{,}2599210...$

$f\left(\sqrt[3]{2}\right)=1{,}613705639...$

5°) $\lim\limits_{x\to+\infty^+}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ donc $\boldsymbol{C}$ présente une branche parabolique en $+\infty$ de direction Oy.

Attention : on écrit $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x^3-6\ln x+1}{x}=x^2-6\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}$ pour $x>0$.

On ne peut pas utiliser la règle des monômes de plus haut degré car à cause de ln x, le quotient $\dfrac{f(x)}{x}$ ne correspond pas à l'expression d'une fonction rationnelle.

6°) $\mathrm{A}(1\,;2)$; $f'(1)=-3$

11 $\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}$; $\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=2^x(1+x\ln2)$.

Solution détaillée :

Méthode : On écrit $f(x)=x\times\mathrm{e}^{x\ln2}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)&=\mathrm{e}^{x\ln2}+x\times\ln2\times\mathrm{e}^{x\ln2}\\ &=\mathrm{e}^{x\ln2}(1+x\ln2)\end{aligned}$$

Erreur : calculer la dérivée de la fonction $x\mapsto 2^x$ en utilisant la formule de la dérivée des fonctions $x\mapsto x^n$.
On obtient alors 2^{x-1} qui est un résultat complètement faux.

12 $\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ (méthode : changement de variable ; on pose $X=x\ln3$, on obtient $f(x)=\dfrac{1}{(\ln3)^2}\times\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^X}{X}}$).

Solution détaillée :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x^2}{3^x}$$
$$= \frac{x^2}{e^{x\ln 3}}$$

On pose $X = x\ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{X}{\ln 3}$.

$$x \longrightarrow +\infty \;\Leftrightarrow\; X \longrightarrow +\infty$$

$$f(x) = \frac{\left(\dfrac{X}{\ln 3}\right)^2}{e^X} = \left(\frac{X}{\ln 3}\right)^2 \times \frac{1}{e^X} = \frac{1}{(\ln 3)^2} \times \frac{X^2}{e^X} = \frac{1}{(\ln 3)^2} \times \frac{1}{\dfrac{e^X}{X^2}}$$

$\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X^2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X^2} = +\infty$ (limite de référence ; croissance comparée) d'où $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^X}{X^2}} = 0$.

Par suite, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.