$1^{ère}$ S3 **Devoir pour le lundi 30 novembre 2009**

I. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté tels que 18 soit une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$. Déterminer la mesure principale en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$.
On partira de l'encadrement suivant que l'on peut obtenir à partir de la calculatrice : $5\pi < 18 \leq 7\pi$.

Dans les exercices II et III, le plan orienté *P* est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique ainsi que A, B, A', B' les points de coordonnées cartésiennes respectives (1 ; 0), (0 ; 1), (– 1 ; 0), (0 ; – 1).

II. Soit C l'image de $\frac{3\pi}{4}$ sur le cercle $\mathcal{C}$.
1°) Quel est l'ensemble des réels x de l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\frown}{CB'}$?

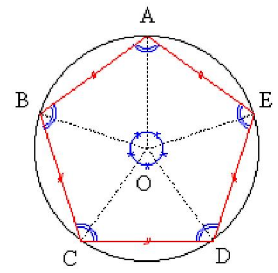
2°) Quel est l'ensemble des réels x de l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\smile}{A'B'}$?

3°) Quel est l'ensemble des réels x de l'intervalle $[0\,;2\pi]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\smile}{AB}$?

III. Soit M l'image de $\frac{\pi}{4}$ sur le cercle $\mathcal{C}$. Faire une figure.
1°) Construire M en indiquant la mesure principale en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM})$ (notation usuelle avec une petite flèche).
2°) Recopier et compléter la phrase
« Les mesures en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM})$ sont tous les nombres de la forme … ».
Illustrer ces mesures sur la droite réelle en indiquant les multiples entiers de π (droite « horizontale » indépendante du cercle trigonométrique).
3°) Quelle est la plus grande mesure négative en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM})$?
Indiquer cette mesure sur la figure du 1°).
4°) Le but de cette question est de déterminer la mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM})$ comprise dans l'intervalle $[104\pi\,;106\pi]$.
$1^{ère}$ méthode : observer que l'on a : $0 \leq \frac{\pi}{4} \leq 2\pi$ et ajouter un même nombre à chaque membre de l'inégalité.

2^{e} méthode : déterminer $k \in \mathbb{Z}$ tel que $104\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq 106\pi$ en résolvant une double inéquation.

IV. Dans le plan orienté, on considère un pentagone régulier indirect ABCDE inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O.



Donner sans explication la mesure principale en radians de chacun des angles orientés : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE})$.

V. Soit ABC un triangle quelconque.
Soit k un réel. On note G_k le barycentre des points pondérés (A, k – 1), (B, k + 1) et (C, 2) lorsqu'il existe.
On note I le milieu de [AB].

Question préliminaire

Déterminer une condition sur k pour que G_k existe.

Le but de l'exercice va être d'étudier l'ensemble des points G_k lorsque k varie en utilisant le logiciel de géométrie dynamique *Geogebra*.

Les compétences suivantes relatives au logiciel de géométrie dynamique seront développées :

- créer un paramètre ;
- définir un barycentre ;
- définir un point paramétré ;
- observer un lieu géométrique.

Travail informatique

Placer les points A, B, C en utilisant la commande *Nouveau point*.
Effacer les axes (en cliquant dessus).
Joindre les points par des segments afin de former le triangle ABC.
Définir le milieu I du segment [AB].
Définir un paramètre réel k à l'aide du bouton Curseur (6^{e} colonne de boutons en partant de la gauche).
Il faut cliquer à un endroit quelconque de la figure.
Il faut choisir des bornes pour k ; on peut par exemple prendre –10 et 10 pour bornes de k.
Dans la fenêtre de saisie, taper ((k – 1) A + (k + 1) B + 2 C) / (2k + 2).

On retiendra la commande spéciale pour définir un barycentre avec le logiciel.

Pour définir le barycentre de trois points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c), a, b, c étant trois réels dont la somme est non nulle, on tape (a A + b B + c C) / (a + b + c).

Le point qui va apparaître sur la figure sera nommé D. Cliquer alors sur le point D puis renommer le point en G_k (on tapera G_k).

On va faire varier k. Pour cela, cliquer sur le bouton *Déplacer* (1er bouton en partant de la gauche) puis retourner sur le curseur en cliquant dessus.
On cliquer sur le point G et sélectionner le mode *Trace activée*.

Emettre alors une conjecture sur la position du point G_k lorsque k varie.
On formulera la conjecture de la manière suivante :
« Lorsque k varie, il semble que G_k soit situé sur la droite …………………………. ».

Quelques raffinements possibles :
- on peut éventuellement coder les segments de même longueur pour montrer que I est le milieu du segment [AB] ;
- on peut aussi mettre le point G dans une autre couleur ce qui permet de mieux visualiser la trace des points G_k.

Travail mathématique sur papier

Démontrer la conjecture émise précédemment.

VI. Soit ABC un triangle quelconque.
Soit k un réel. On note G_k le barycentre de points pondérés : (A, $k + 1$), (B, – 1) et (C, 1) lorsqu'il existe.

Question préliminaire

Déterminer une condition sur k pour que G_k existe.

Travail informatique

Réaliser à l'aide du logiciel *Geogebra* un travail similaire à celui de l'exercice V.
Représenter les positions du point G_k pour diverses valeurs de k.

Quelle particularité peut-on observer pour les points obtenus ?

Travail mathématique sur papier

Démontrer la conjecture.

$1^{\text{ère}}$ S3 — Corrigé du devoir pour le 30 novembre 2009

I. Déterminons la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$.

On partira de l'encadrement suivant que l'on peut obtenir à partir de la calculatrice : $5\pi < 18 \leq 7\pi$.

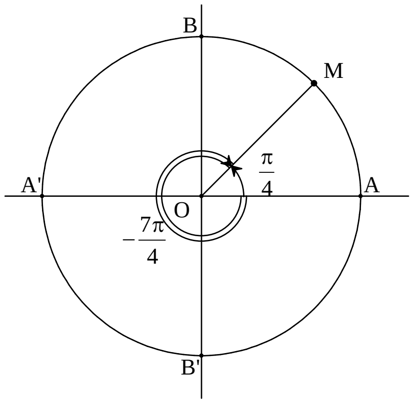
$$5\pi < 18 \leq 7\pi$$
$$5\pi - 6\pi < 18 - 6\pi \leq 7\pi - 6\pi \qquad -6\pi$$

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ est $18 - 6\pi$.

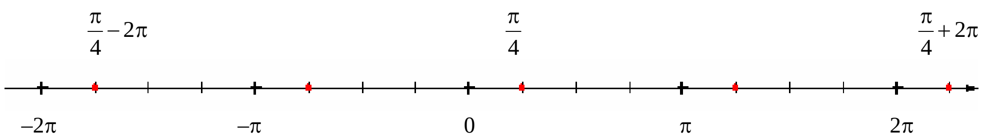
II. 1°) $\left[-\pi\ ;-\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}\ ;\pi\right]$ 2°) $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\pi\right] \cup \{-\pi\}$ 3°) $\left[\frac{\pi}{2}\ ;2\pi\right] \cup \{0\}$

III.

1°)



2°) Les mesures en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\overrightarrow{OM}\right)$ sont tous les nombres de la forme $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.



3°) La plus grande mesure négative en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\overrightarrow{OM}\right)$ est $\frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}$.

4°) Déterminons la mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\overrightarrow{OM}\right)$ comprise dans l'intervalle $[104\pi\ ;106\pi]$.

$1^{\text{ère}}$ méthode : on part de l'encadrement : $0 \leq \frac{\pi}{4} \leq 2\pi$.

On ajoute le nombre $104\ \pi$ à chaque membre de l'inégalité.

On obtient $104\pi \leq \frac{\pi}{4} + 104\pi \leq 106\pi$ ou encore $104\pi \leq \frac{417\pi}{4} \leq 106\pi$.

La mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\overrightarrow{OM}\right)$ comprise dans l'intervalle $[104\pi\ ;106\pi]$ est $\frac{417\pi}{4}$.

2^{e} méthode : déterminons $k \in \mathbb{Z}$ tel que $104\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq 106\pi$.

La double inégalité est successivement équivalente à :

$$104\pi - \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi \leq 106\pi - \frac{\pi}{4}$$
$$\frac{415\pi}{4} \leq 2k\pi \leq \frac{423\pi}{4}$$
$$\frac{415}{8} \leq k \leq \frac{423}{8}$$

$$\frac{415}{8} = 51{,}875$$
$$\frac{423}{8} = 52{,}875$$

Or $\boxed{k \in \mathbb{Z}}$ donc $k = 52$ (seul entier compris entre 51,875 et 52,875).
On retrouve le résultat de la $1^{\text{ère}}$ méthode.

IV. $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{2\pi}{5}$

$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}\right) = \frac{6\pi}{5}$

$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}\right) = \frac{8\pi}{5}$ (ou : $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}\right) = -\frac{2\pi}{5}$).

V.

Question préliminaire

Le point G_k est défini lorsque la somme des coefficients est non nulle.
La somme des coefficients est égale à $(k-1) + (k+1) + 2 = 2k + 2$.
Le point G_k est donc défini lorsque $2k + 2 \neq 0$ soit $k \neq -1$.

Travail informatique

Lorsque k varie, il semble que G_k soit situé sur la droite passant par I et parallèle à (AC).

Travail mathématique

On va démontrer la conjecture émise précédemment.

Il y a plusieurs méthodes possibles : on peut partir d'une égalité de position ou bien de l'égalité de définition, ou utiliser un repère (par exemple, le repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$).

1

$1^{\text{ère}}$ méthode : on part d'une égalité de position

On a : $\overrightarrow{\mathrm{AG}_k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (égalité de position).

Or I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

D'où $\overrightarrow{\mathrm{AG}_k} = \overrightarrow{\mathrm{AI}} + \frac{1}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

Par conséquent, $\overrightarrow{\mathrm{IG}_k} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IG}_k}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires.
Donc G_k est situé sur la droite passant par I et parallèle à (AC).

2^{e} méthode : on utilise la relation fondamentale

D'après la relation fondamentale, pour tout point M du plan, on a :
$(k-1)\overrightarrow{\mathrm{MA}} + (k+1)\overrightarrow{\mathrm{MB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{MC}} = (2k+2)\overrightarrow{\mathrm{MG}_k}$.

En particulier, pour $\mathrm{M} = \mathrm{I}$, on obtient : $(k-1)\overrightarrow{\mathrm{IA}} + (k+1)\overrightarrow{\mathrm{IB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{IC}} = (2k+2)\overrightarrow{\mathrm{IG}_k}$.
Cette dernière égalité donne alors successivement les égalités suivantes :

$(k-1)\overrightarrow{\mathrm{IA}} + (k+1)\left(-\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right) + 2\overrightarrow{\mathrm{IC}} = (2k+2)\overrightarrow{\mathrm{IG}_k}$

$(k-1)\overrightarrow{\mathrm{IA}} - (k+1)\overrightarrow{\mathrm{IA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{IC}} = (2k+2)\overrightarrow{\mathrm{IG}_k}$

$-2\overrightarrow{\mathrm{IA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{IC}} = (2k+2)\overrightarrow{\mathrm{IG}_k}$

$2\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (2k+2)\overrightarrow{\mathrm{IG}_k}$

Finalement, on obtient l'égalité : $\overrightarrow{\mathrm{IG}_k} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IG}_k}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires.
Donc G_k est situé sur la droite passant par I et parallèle à (AC).

3^{e} méthode : on munit le plan du repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$

Dans ce repère, A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(0 ; 1), I($\frac{1}{2}$; 0) (formule des coordonnées d'un milieu).

En appliquant la formule des coordonnées d'un barycentre on obtient : $\mathrm{G}_k\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{k+1}\right)$.

Donc $\overrightarrow{\mathrm{IG}_k}\left(0\,;\frac{1}{k+1}\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}(0\,;1)$

On peut donc écrire l'égalité : $\overrightarrow{\mathrm{IG}_k} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IG}_k}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires.
Par suite, G_k est situé sur la droite passant par I et parallèle à (AC).

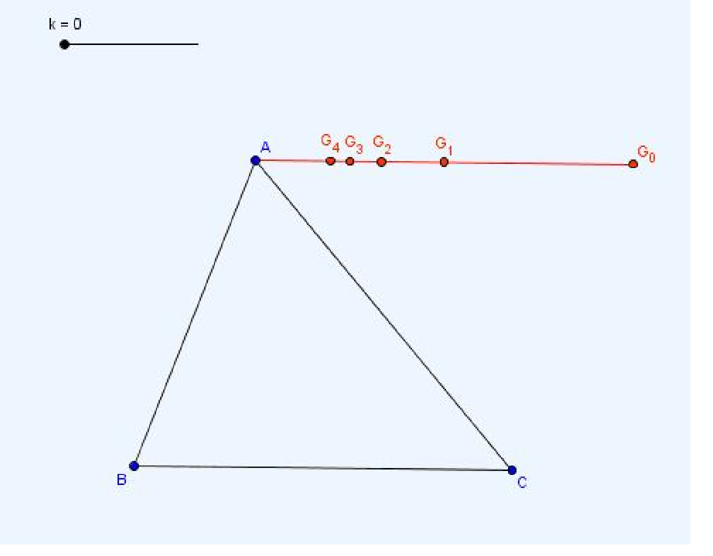
VI.

Question préliminaire

Le point G_k est défini lorsque la somme des coefficients est non nulle.
La somme des coefficients est égale à $k+1-1+1 = k+1$.
Le point G_k est donc défini lorsque $k+1 \neq 0$ soit $k \neq -1$.

Travail informatique

Lorsque k varie, il semble que G_k soit situé sur la droite passant par A et parallèle à (BC).



Travail mathématique sur papier

Comme dans l'exercice précédent, il y a plusieurs méthodes possibles.

$1^{\text{ère}}$ méthode : on part d'une égalité de position

On a : $\overrightarrow{\mathrm{AG}_k} = -\frac{1}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (égalité de position).

Donc : $\overrightarrow{\mathrm{AG}_k} = \frac{1}{k+1}\left(-\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{AG}_k} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AG}_k}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ sont colinéaires.
Donc G_k est situé sur la droite passant par A et parallèle à (BC).

2[e] méthode : on part de l'égalité de définition

On a : $(k+1)\overrightarrow{\mathrm{G}_k\mathrm{A}}-\overrightarrow{\mathrm{G}_k\mathrm{B}}+\overrightarrow{\mathrm{G}_k\mathrm{C}}=\vec{0}$ (égalité de position).

On obtient alors : $(k+1)\overrightarrow{\mathrm{G}_k\mathrm{A}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{0}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AG}_k}=\dfrac{1}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AG}_k}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ sont colinéaires.
Donc G_k est situé sur la droite passant par A et parallèle à (BC).

3[e] méthode : on munit le plan du repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$

Dans ce repère, A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(0 ; 1).

En appliquant la formule des coordonnées d'un barycentre on obtient : $\mathrm{G}_k\left(-\dfrac{1}{k+1}\,;\dfrac{1}{k+1}\right)$.

Donc $\overrightarrow{\mathrm{AG}_k}\left(-\dfrac{1}{k+1}\,;\dfrac{1}{k+1}\right)$ $\overrightarrow{\mathrm{BC}}(-1\,;1)$

On peut donc écrire l'égalité : $\overrightarrow{\mathrm{AG}_k}=\dfrac{1}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AG}_k}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires.
Par suite, G_k est situé sur la droite passant par A et parallèle à (BC).