TS — Exercices sur les nombres complexes (1)

1 Calculer en donnant le résultat sous forme algébrique $z_1=(2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$; $z_2=(1-\mathrm{i})^4$;
$z_3=(5+2\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})$; $z_4=\left(\dfrac{1}{2}+3\mathrm{i}\right)+(\mathrm{i}-1)$; $z_5=\dfrac{1}{2-\mathrm{i}}$; $z_6=\dfrac{1+3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$; $z_7=\dfrac{1}{4\mathrm{i}}$.

2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2\mathrm{i}z-3=z+\mathrm{i}$.

3 Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système (Σ) $\begin{cases}3z+z'=5+2\mathrm{i}\\ z-z'=1-\mathrm{i}\end{cases}$.

Indications :
Il s'agit d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.
Calculer d'abord le déterminant.
Ne pas poser $z=a+\mathrm{i}b$.

4 Pour tout nombre complexe $z=x+\mathrm{i}y$ $\left((x\,;y)\in\mathbb{R}^2\right)$, on pose $Z=z^2-z$.
Écrire Z sous forme algébrique en fonction de x et y.
Exprimer Re Z et Im Z en fonction de x et de y.

5 Pour tout nombre complexe $z\neq 1$, on pose $Z=\dfrac{z}{z-1}$.
On pose $z=x+\mathrm{i}y$, x et y étant deux réels tels que $(x\,;y)\neq(1\,;0)$.
Exprimer Re Z et Im Z en fonction de x et de y.

6 Soit λ un réel.
On pose $z=(\lambda+\mathrm{i})\left[\lambda+5-\mathrm{i}(\lambda-7)\right]$.
Déterminer λ tel que $z\in\mathrm{i}\mathbb{R}$.

7 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z+\mathrm{i}\overline{z}=5-4\mathrm{i}$.

8 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\mathrm{i}z+2)\left(\overline{z}-5\mathrm{i}\right)=0$.

Indication : ne pas poser $z=a+\mathrm{i}b$.

9 Pour tout réel α, on pose $z_1=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$ et $z_2=(1-2\cos\alpha)+\mathrm{i}\sin(2\alpha)$.
1°) Déterminer les réels α tels que z_1 soit un réel.
2°) Déterminer les réels α tels que z_2 soit un imaginaire pur.

10 Pour tout nombre complexe $z=x+\mathrm{i}y$ $\left((x\,;y)\in\mathbb{R}^2\right)$, on pose $Z=z\times\overline{z}+(2+i)z+(2+3i)\overline{z}+1$.
1°) Exprimer Re Z et Im Z en fonction de x et de y.
2°) Déterminer l'ensemble E des points M du plan complexe d'affixe z tels que Z soit réel.

On rédigera ainsi : « $\mathrm{M}(z)\in E \Leftrightarrow Z\in\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow$ Im $(z)=0$
$\Leftrightarrow$ …. »

3°) Déterminer l'ensemble F des points M du plan complexe d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.
Représenter cet ensemble F sur une figure.

11 Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v})$.
On note A le point d'affixe i et on pose $P^*=P\setminus\{\mathrm{A}\}$.
On note f l'application de P^* dans P qui, à tout point M de P^*, d'affixe $z\neq\mathrm{i}$, associe le point M' d'affixe $z'=\dfrac{\mathrm{i}z}{z-\mathrm{i}}$.

(L'affixe de l'image M' du point M par f est donc donnée par $z_{\mathrm{M'}}=\dfrac{\mathrm{i}z_{\mathrm{M}}}{z_{\mathrm{M}}-\mathrm{i}}$; attention alors à la place du prime !).

1°) Déterminer les points invariants par f (c'est-à-dire confondus avec leur image).
On rédigera ainsi la recherche : « M est invariant par f si et seulement si M' = M » sous la forme d'une chaîne d'équivalences et l'on conclura ainsi : « Les points invariants par f sont les points …. et ….. ».

2°) Soit B le point d'affixe 2.
a) Déterminer l'affixe du point B' image de B par f (il s'agit donc de calculer $z_{\mathrm{B'}}$; dans la notation à la place du prime).
b) Déterminer l'affixe du point C, antécédent de B par f. Que remarque-t-on ?

3°) Étant donné un nombre complexe z distinct de i, on pose $z=x+\mathrm{i}y$ et $z'=x'+\mathrm{i}y'$, avec x, y, x', y' réels.
a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
b) Déterminer l'ensemble E des points M du plan, distincts de A, pour lesquels z' est réel.

On rédigera ainsi : « $\mathrm{M}(z)\in E \Leftrightarrow z'\in\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow$ Im $(z')=0$
$\Leftrightarrow$ …. »

sous la forme d'une chaîne d'équivalences en faisant attention à bien mettre les symboles d'équivalence les uns sous les autres.

Faire une figure dans le plan. <u>On prendra 4 cm (ou 4 « gros carreaux ») pour unité graphique</u>.
Placer le point A et représenter l'ensemble E.

12 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v})$.
À tout nombre complexe $z\neq 4$, on associe le nombre complexe $Z=\dfrac{\mathrm{i}z-4}{z-4}$.
On note A le point d'affixe 4.
1°) On pose $z=x+\mathrm{i}y$ et $Z=X+\mathrm{i}\,Y$, avec x, y, X, Y réels.
Exprimer X et Y en fonction de x et y.
2°) Déterminer l'ensemble E des points M du plan, distincts de A et d'affixe z, tels que Z soit réel.
Faire une figure dans le plan. <u>On prendra 2 cm (ou 2 « gros carreaux ») pour unité graphique</u>.
Placer le point A et représenter l'ensemble E.

13 1°) Factoriser le polynôme $P(Z)=Z^4-1$ à l'aide de quatre facteurs du premier degré et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z)=0$.

2°) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4=1$.

14 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+2z^2-3=0$.

$\boxed{\textbf{15}}$ Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système (S) $\begin{cases} z+z'=2 \\ zz'=17 \end{cases}$.

On raisonnera par équivalences.

$\boxed{\textbf{16}}$ On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4-5z^3+6z^2-5z+1=0$ (E).

1°) Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).

2°) Démontrer que (E) est équivalente au système (Σ) $\begin{cases} u^2-5u+4=0 \\ u=z+\dfrac{1}{z} \end{cases}$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $u^2-5u+4=0$.

4°) En déduire les solutions de (E).

$\boxed{\textbf{17}}$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{z-3\text{i}}{z+2}\right)^2-6\left(\dfrac{z-3\text{i}}{z+2}\right)+13=0$.

Dans les exercices $\boxed{\textbf{18}}$ à $\boxed{\textbf{20}}$, on se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

$\boxed{\textbf{18}}$ On considère les points A(– 1 – 3i), B(2 – i), C(3 + 3i) et D(i).
Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

$\boxed{\textbf{19}}$ On considère les points A(3 + 2i), B(5 + 4i), C(6 + 5i).
Démontrer que A, B, C sont alignés.

$\boxed{\textbf{20}}$ On considère les points A(– 1 + 4i), B(5 – 3i) et C(9 + i).
Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

$\boxed{\textbf{21}}$ On considère le polynôme complexe $P(z)=z^3-(2+3\text{i})z^2+3(1+2\text{i})z-9\text{i}$.

Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$ (E).

1°) a) Soit x un réel quelconque.
Calculer $P(\text{i}x)$ en fonction de x ; donner le résultat sous forme algébrique.
b) Déterminer x tel que $P(\text{i}x)=0$.
En déduire que le polynôme admet une racine imaginaire pure.
2°) En utilisant la racine déterminée précédemment, déterminer une factorisation de $P(z)$.

3°) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

$\boxed{\textbf{22}}$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+\overline{z}-1=0$.

Rajouter un exercice : calcul d'une affixe de barycentre.

Réponses

$\boxed{1}$ $z_1=8-\text{i}$; $z_2=-4$; $z_3=29$, $z_4=-\dfrac{1}{2}+4\text{i}$; $z_5=\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}\text{i}$; $z_6=2+\text{i}$; $z_7=-\dfrac{\text{i}}{4}$

Conseil : vérifier les calculs avec la calculatrice.

Détail des calculs :

$z_1=(2+\text{i})(3-2\text{i})=6-4\text{i}+3\text{i}-2\text{i}^2=8-\text{i}$

On applique la double distributivité

$z_2=(1-\text{i})^4=\left[(1-\text{i})^2\right]^2=(1-2\text{i}-1)^2=(-2\text{i})^2=-4$

$z_3=(5+2\text{i})(5-2\text{i})=5^2-(2\text{i})^2=25+4=29$

$z_4=\left(\dfrac{1}{2}+3\text{i}\right)+(\text{i}-1)=-\dfrac{1}{2}+4\text{i}$ (« on fait tomber les parenthèses)

$z_5=\dfrac{1}{2-\text{i}}=\dfrac{2+\text{i}}{(2-\text{i})(2+\text{i})}=\dfrac{2+\text{i}}{2^2-i^2}=\dfrac{2+\text{i}}{2^2+1}=\dfrac{2+\text{i}}{5}$

On applique l'identité : $(a+\text{i}b)(a-\text{i}b)=a^2+b^2$.

Le résultat $z_5=\dfrac{2+\text{i}}{5}$ est considéré comme forme algébrique (il n'est pas nécessaire de repasser à $z_5=\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}\text{i}$)

$z_6=\dfrac{(1+3\text{i})(1-\text{i})}{(1+\text{i})(1-\text{i})}=\dfrac{1+2\text{i}+3}{2}=\dfrac{4+2\text{i}}{2}=2+\text{i}$

$z_7=\dfrac{1}{4\text{i}}=\dfrac{1\times\text{i}}{4\text{i}\times\text{i}}=\dfrac{\text{i}}{-4}=-\dfrac{\text{i}}{4}$

$\boxed{2}$ On rédige par équivalences.

(1) $\Leftrightarrow$ …

$\Leftrightarrow$ …

$\Leftrightarrow$ …

On trouve $S=\left\{-\dfrac{1}{5}-\dfrac{7}{5}\text{i}\right\}$

Solution détaillée :

(1) $\Leftrightarrow 2\text{i}z-z=\text{i}+3$

$\Leftrightarrow (2\text{i}-1)z=\text{i}+3$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{\text{i}+3}{2\text{i}-1}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{(\text{i}+3)(2\text{i}+1)}{(2\text{i}-1)(2\text{i}+1)}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{2\text{i}^2+\text{i}+6\text{i}+3}{4\text{i}^2-1}$

$\Leftrightarrow z=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{7}{5}\text{i}$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$S=\left\{-\dfrac{1}{5}-\dfrac{7}{5}\text{i}\right\}$

$\boxed{3}$ On raisonne encore par équivalences pour la résolution du système.

On résout le système dans $\mathbb{C}^2$ ($\mathbb{C}^2$ désigne l'ensemble des couples de nombres complexes).

On trouve : $S=\left\{\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{\text{i}}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}+\dfrac{5\text{i}}{4}\right)\right\}$ (attention à la notation : parenthèses pour le couple et accolades pour l'ensemble).

Solution détaillée :

$$\begin{cases}3z+z'=5+2\text{i} & (1)\\ z-z'=1-\text{i} & (2)\end{cases}$$

Il s'agit d'un système linéaire.
On calcule son déterminant.

$D=3\times(-1)-1\times1=-4$

$D\neq0$ donc le système admet un unique couple solution.

On résout le système par combinaison.

$$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4z=6+\text{i}\\ z-z'=1-\text{i}\end{cases}\quad\text{(on ajoute la première et la deuxième ligne)}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}z=\dfrac{6+\text{i}}{4}\\ z-z'=1-\text{i}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}z=\dfrac{6+\text{i}}{4}\\ z'=z-1+\text{i}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}z=\dfrac{6+\text{i}}{4}\\ z'=\dfrac{6+\text{i}}{4}-1+\text{i}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\mathrm{i}}{4} \\ z' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{4}\mathrm{i} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est $S = \left\{ \left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{\mathrm{i}}{4} \; ; \; \dfrac{1}{2} + \dfrac{5\mathrm{i}}{4} \right) \right\}$.

$\boxed{4}$ $\mathrm{Re}\, Z = x^2 - y^2 - x$; $\mathrm{Im}\, Z = 2xy - y$

Solution détaillée :

$$\begin{aligned} Z &= z^2 - z \\ &= (x+\mathrm{i}y)^2 - (x+\mathrm{i}y) \\ &= x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 - x - \mathrm{i}y \\ &= x^2 - y^2 - x + \mathrm{i}(2xy - y) \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Il faut mener les calculs intelligemment ; $\mathrm{Re}\, Z = \dfrac{x^2+y^2-x}{(x-1)^2+y^2}$; $\mathrm{Im}\, Z = -\dfrac{y}{(x-1)^2+y^2}$.

Solution détaillée :

$Z = \dfrac{z}{z-1} \qquad (z \neq 1)$

$z = x + \mathrm{i}y$ (x et y étant deux réels tels que $(x\,;y) \neq (1\,;0)$).

Exprimons $\mathrm{Re}\, Z$ et $\mathrm{Im}\, Z$ en fonction de x et de y.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{x+\mathrm{i}y}{x+\mathrm{i}y-1} \\ &= \frac{x+\mathrm{i}y}{(x-1)+\mathrm{i}y} \\ &= \frac{(x+\mathrm{i}y)\left[(x-1)-\mathrm{i}y\right]}{\left[(x-1)+\mathrm{i}y\right]\left[(x-1)-\mathrm{i}y\right]} \\ &= \frac{x(x-1)+y^2+\mathrm{i}\left(-xy+y(x-1)\right)}{(x-1)^2+y^2} \\ &= \frac{x^2+y^2-x-\mathrm{i}y}{(x-1)^2+y^2} \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Re}\, Z = \dfrac{x^2+y^2-x}{(x-1)^2+y^2}$ et que $\mathrm{Im}\, Z = -\dfrac{y}{(x-1)^2+y^2}$.

$\boxed{6}$ Attention à ne pas développer l'expression de manière anarchique. Il faut développer intelligemment le produit (développement à 4 termes qui permet de faire apparaître tout de suite les parties réelles et les parties imaginaires).

$z = \lambda(\lambda+5) - \mathrm{i}^2(\lambda-7) + \mathrm{i}(\lambda+5) - \mathrm{i}\lambda(\lambda-7) = \lambda(\lambda+5) + (\lambda-7) + \mathrm{i}\left[\lambda+5-\lambda(\lambda-7)\right]$.

$z = \lambda^2 + 6\lambda - 7 + i\left(-\lambda^2 + 8\lambda + 5\right)$

$$\begin{aligned} z \in \mathrm{i}\mathbb{R} &\Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 + 6\lambda - 7 = 0 \end{aligned}$$

Considérons le polynôme $\lambda^2 + 6\lambda - 7$.

Ce polynôme admet deux racines dans $\mathbb{R}$: 1 (racine évidente) et –7 (obtenue par produit).

$z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = -7$

$\boxed{7}$ On pose $z = x + \mathrm{i}\,y$ avec x et y réels.

$S = \left\{ \dfrac{14-13\mathrm{i}}{3} \right\}$

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z + \mathrm{i}\bar{z} = 5 - 4\mathrm{i}$ (1).

On pose $z = x + \mathrm{i}\,y$ $\left((x\,;y) \in \mathbb{R}^2\right)$.

On a : $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$.

$(1) \Leftrightarrow 2(x+\mathrm{i}y) + \mathrm{i}(x-\mathrm{i}y) = 5 - 4\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow 2x + 2\mathrm{i}y + \mathrm{i}x - \mathrm{i}^2 y = 5 - 4\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow 2x + 2\mathrm{i}y + \mathrm{i}x + y = 5 - 4\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow 2x + y + \mathrm{i}(x+2y) = 5 - 4\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow 2x + y + \mathrm{i}(x+2y) = 5 - 4\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$ (On traduit sous forme de système ; en effet, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales)

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ x + 2(5-2x) = -4 \end{cases}$ (on résout le système linéaire par la méthode que l'on veut, ici par substitution)

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ -3x = -14 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ x = \dfrac{14}{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 2\times\dfrac{14}{3} \\ x = \dfrac{14}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{13}{3} \\ x = \dfrac{14}{3} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (1) est $S = \left\{\dfrac{14-13\text{i}}{3}\right\}$.

$\boxed{8}$ $S = \{2\text{i}\ ;-5\text{i}\}$

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\text{i}z+2)\left(\overline{z}-5\text{i}\right)=0$ (1).

(1) $\Leftrightarrow$ $\text{i}z+2=0$ ou $\overline{z}-5\text{i}=0$

$\Leftrightarrow z=-\dfrac{2}{\text{i}}$ ou $\overline{z}=5\text{i}$

$\Leftrightarrow z=-\dfrac{2\times\text{i}}{\text{i}\times\text{i}}$ ou $z=-5\text{i}$

$\Leftrightarrow z=-\dfrac{2\text{i}}{-1}$ ou $z=-5\text{i}$

$\Leftrightarrow z=2\text{i}$ ou $z=-5\text{i}$

L'ensemble des solutions de (1) est $S=\{2\text{i}\ ;-5\text{i}\}$.

$\boxed{9}$ 1°) $z_1\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \sin\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

2°)

$z_2\in \text{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow 1-2\cos\alpha=0 \Leftrightarrow \cos\alpha=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\alpha=\cos\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ ou $\alpha=-\dfrac{\pi}{3}+2k'\pi\ (k'\in\mathbb{Z})$

Rappel sur les équations trigonométriques :

$\cos a=\cos b$ si et seulement si $a=b+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ ou $a=-b+2k'\pi\ (k'\in\mathbb{Z})$
$\sin a=\sin b$ si et seulement si $a=b+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ ou $a=\pi-b+2k'\pi\ (k'\in\mathbb{Z})$

Pour les équations $\cos x=0$, $\cos x=1$, $\cos x=-1$, $\sin x=0$, $\sin x=1$, $\sin x=-1$, il n'y a qu'une famille de solutions (utiliser un cercle trigonométrique).

$\boxed{10}$ 1°) $\text{Re}\,Z = x^2+y^2+4x+2y+1$; $\text{Im}\,Z = 4x$.

2°) L'ensemble E est l'axe $(\text{O}y)$.

3°) **Rappel :**

Une équation du cercle $\mathcal{C}$	de centre $\Omega(a\,;b)$ de rayon $R>0$	s'écrit $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. équation cartésienne sous forme canonique / normale

L'ensemble F est le cercle de centre Ω(– 2 ; – 1) et de rayon 2.

Solution détaillée :

1°)

$Z=z\overline{z}+(2+i)z+(2+3i)\overline{z}+1$

$Z=(x+\text{i}y)(x-\text{i}y)+(2+i)(x+\text{i}y)+(2+3i)(x-\text{i}y)+1$

$Z=x^2+y^2+2x-y+2x+3y+1+\text{i}(2y+x-2y+3x)$

$Z=\underbrace{x^2+y^2+4x+2y+1}_{\text{Re}\,Z}+\text{i}\,\underbrace{4x}_{\text{Im}\,Z}$ (on sépare tout ce qui est avec des i et tout ce qui est sans i)

On a donc : $\text{Re}\,Z=x^2+y^2+4x+2y+1$ et $\text{Im}\,Z=4x$.

(Du coup, la partie réelle est super grande !).

2°) Déterminons l'ensemble E = {M(z) ∈ P / $Z\in\mathbb{R}$}.

M(z) ∈ E ⇔ $Z\in\mathbb{R}$

⇔ Im (Z) = 0

⇔ $4x$ = 0

⇔ x = 0

On peut conclure de deux manières :

• L'ensemble E est l'axe (Oy) (c'est tout l'axe des imaginaires).

• E = (Oy) (égalité d'ensemble)

3°) Déterminons l'ensemble F = {M(z) ∈ P / $Z\in\text{i}\mathbb{R}$}.

$\text{M}(z)\in F \Leftrightarrow Z\in\text{i}\mathbb{R}$

⇔ Re Z = 0

$\Leftrightarrow x^2+y^2+4x+2y+1=0$ (on reconnaît une équation du type de celle d'un cercle)

$\Leftrightarrow (x+2)^2-4+(y+1)^2-1+1=0$ *

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y+1)^2=4$

* On met sous forme canonique les deux petits trinômes incomplets en x et en y :

$$x^2+4x=\left(x^2+4x+4\right)-4 = (x+2)^2-4$$

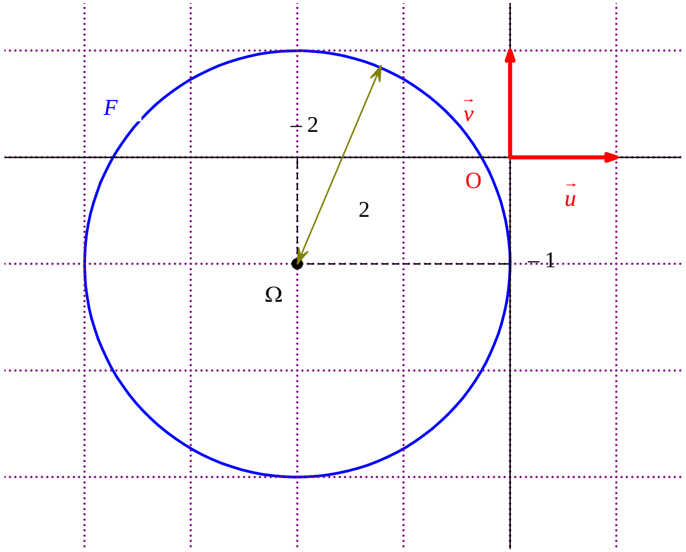
$$y^2+2y=\left(y^2+2y+1\right)-1 = (y+1)^2-1$$

On peut conclure de deux manières :

• L'ensemble F est le cercle de centre $\Omega(-2\,;-1)$ et de rayon 2.

• $F = \mathcal{C}$ avec $\mathcal{C}$: cercle de centre $\Omega(-2\,;-1)$ et de rayon 2.

égalité d'ensemble



On remarque que le cercle F est tangent à l'axe des ordonnées (car la distance du point O à l'axe (Oy) est égale à 2 donc au rayon du cercle).

$\boxed{\textbf{11}}$ Exercice déroutant à cause de la formulation déroutante (car les élèves ne sont pas habitués). Exercice très important.

1°) O et D avec D d'affixe 2i.

2°) a) $z_{B'}=\dfrac{-2+4i}{5}$ (attention dans la notation à la place du prime) ; b) $z_C=\dfrac{-2+4i}{5}$.

3°) a) $x'=-\dfrac{x}{x^2+(y-1)^2}$; $y'=\dfrac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}$

Pour cette question, l'utilisation d'un logiciel de calcul formel permettant de travailler avec des nombres complexes (tels que XCas) peut être intéressante.

b) On peut utiliser la règle : $\dfrac{A}{B}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B\neq 0\end{cases}$

Utiliser également l'équivalence : $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow (a\,;b)=(0\,;0)$.

Donc, par négation, on a : $a^2+b^2\neq 0 \Leftrightarrow (a\,;b)\neq(0\,;0)$

(L'équivalence ($P \Leftrightarrow Q$) est équivalente à (non $P \Leftrightarrow$ non Q))

$E=\mathcal{C}\setminus\{\text{A}\}$ avec $\mathcal{C}$: cercle de centre $\Omega\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

On observe que le point A appartient au cercle $\mathcal{C}$ car ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
N.B. : Le cercle $\mathcal{C}$ est tangent à l'axe des abscisses donc il faut priver $\mathcal{C}$ du point A.

Solution détaillée :

1°) M est invariant par f $\Leftrightarrow$ M' = M

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow z_M = z_{M'}\\
&\Leftrightarrow z_M = \frac{iz_M}{z_M - i}\\
&\Leftrightarrow z_M\left(z_M-i\right)=iz_M\\
&\Leftrightarrow {z_M}^2 - iz_M = iz_M\\
&\Leftrightarrow {z_M}^2 - 2iz_M = 0\\
&\Leftrightarrow z_M\left(z_M-2i\right)=0\\
&\Leftrightarrow z_M=0 \text{ ou } z_M-2i=0\\
&\Leftrightarrow z_M=0 \text{ ou } z_M=2i
\end{aligned}$$

Les points invariants par f sont les points O d'affixe 0 et A d'affixe 2i.

2°)

a) Déterminons l'affixe du point B' = f (B).

$$\begin{aligned}
z_{B'} &= \frac{iz_B}{z_B-i}\\
&=\frac{2i}{2-i}\\
&=\frac{2i(2+i)}{(2-i)(2+i)}\\
&=\frac{4i+2i^2}{4-i^2}\\
&=\frac{4i-2}{5}
\end{aligned}$$

B' a pour affixe $\dfrac{4i-2}{5}$.

b) Déterminons l'affixe de l'antécédent C de B par *f*.

C est l'antécédent de B par *f* $\Leftrightarrow$ $z_B = \dfrac{iz_C}{z_C - i}$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{iz_C}{z_C - i}$$

$$\Leftrightarrow 2(z_C - i) = iz_C$$

$$\Leftrightarrow 2z_C - 2i = iz_C$$

$$\Leftrightarrow 2z_C - iz_C = 2i$$

$$\Leftrightarrow z_C(2 - i) = 2i$$

$$\Leftrightarrow z_C = \frac{2i}{2 - i}$$

$$\Leftrightarrow z_C = z_{B'}$$

C a pour affixe $\dfrac{4i - 2}{5}$.

3°) a)

$$z' = \frac{iz}{z - i}$$

$$= \frac{i(x + iy)}{(x + iy) - i}$$

$$= \frac{ix - y}{x + i(y - 1)}$$

$$= \frac{(ix - y)[x - i(y - 1)]}{[x + i(y - 1)][x - i(y - 1)]}$$

$$= \frac{ix^2 + x(y - 1) - xy + iy(y - 1)}{x^2 + (y - 1)^2}$$

$$= \frac{i[x^2 + y(y - 1)] + x(y - 1) - xy}{x^2 + (y - 1)^2}$$

$$= \frac{i(x^2 + y^2 - y) + \cancel{xy} - x - \cancel{xy}}{x^2 + (y - 1)^2}$$

$$= \frac{i(x^2 + y^2 - y) - x}{x^2 + (y - 1)^2}$$

D'où $x' = -\dfrac{x}{x^2 + (y - 1)^2}$ et $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + (y - 1)^2}$.

b) M(z) $\in E \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \text{Im}(z') = 0$$

$$\Leftrightarrow y' = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + (y - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - y = 0 \\ x^2 + (y - 1)^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \\ (x\,;y) \neq (0\,;1) \end{cases}$$

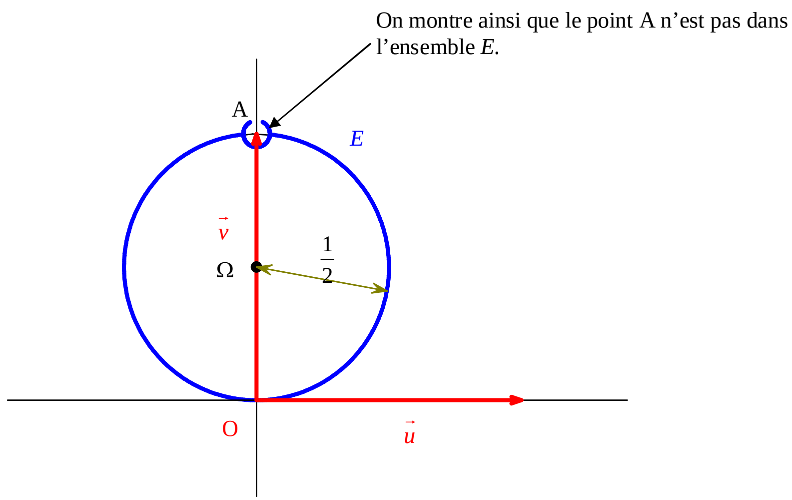
La conclusion peut se formuler de deux façons :

E est le cercle de centre Ω de coordonnées (0 ; $\frac{1}{2}$) et de rayon $\frac{1}{2}$ privé du point A (d'affixe 1).

ou

$E = \mathcal{C} \setminus \{A\}$ avec $\mathcal{C}$: cercle de centre Ω de coordonnées (0 ; $\frac{1}{2}$) et de rayon $\frac{1}{2}$.

On observe que le point A appartient au cercle $\mathcal{C}$ car ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
Donc il faut priver $\mathcal{C}$ du point A.



N.B. : On constate graphiquement que le cercle $\mathcal{C}$ est tangent à l'axe des abscisses en O ; on le démontre aisément car la distance OΩ est égale à $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire au rayon du cercle.

12 **Solution détaillée :**

1°)

$$Z=\frac{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)-4}{(x+\mathrm{i}y)-4}$$

$$Z=\frac{\mathrm{i}x-y-4}{(x-4)+\mathrm{i}y}$$

$$Z=\frac{[\mathrm{i}x-(y+4)]\times[(x-4)-\mathrm{i}y]}{[(x-4)+\mathrm{i}y]\times[(x-4)-\mathrm{i}y]}$$

$$Z=\frac{xy-(x-4)(y+4)+\mathrm{i}[x(x-4)+y(y+4)]}{(x-4)^2+y^2}$$

$$Z=\frac{-4x+4y+16+\mathrm{i}(x^2+y^2-4x+4y)}{(x-4)^2+y^2}$$

Donc $X=\mathrm{Re}\,Z=\dfrac{-4x+4y+16}{(x-4)^2+y^2}$; $Y=\mathrm{Im}\,Z=\dfrac{x^2+y^2-4x+4y}{(x-4)^2+y^2}$

2°)

$\mathrm{M}(z)\in E \Leftrightarrow Z\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \mathrm{Im}\,(Z)=0$

$\Leftrightarrow Y=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2-4x+4y}{(x-4)^2+y^2}=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x+4y=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+2)^2=8$

La conclusion peut se formuler de deux façons :

E est le cercle de centre Ω de coordonnées (2 ; – 2) et de rayon $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ privé du point A.

ou

$E=\mathcal{C}\ \backslash\{\mathrm{A}\}$ avec $\mathcal{C}$: cercle de centre Ω de coordonnées (2 ; – 2) et de rayon $2\sqrt{2}$.

On observe que le point A appartient au cercle $\mathcal{C}$ car ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
Donc il faut priver $\mathcal{C}$ du point A.

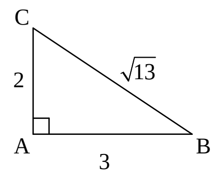
Tracé de $\mathcal{C}$:

On place le point Ω (2 ; – 2).

On constate que O $\in\mathcal{C}$ en utilisant l'équation $x^2+y^2-4x+4y=0$ (car les coordonnées de O vérifient son équation cartésienne : $0^2+0^2-4\times0+4\times0=0$)

Rappel : construction de la racine carrée d'un entier à la règle et au compas en utilisant le théorème de Pythagore.

Exemple 1 : construire un segment de longueur $\sqrt{13}$ à la règle et au compas (sans instrument de mesure).



Exemple 2 : construire un segment de longueur $\sqrt{5}$ à la règle et au compas.

On a deux possibilités :

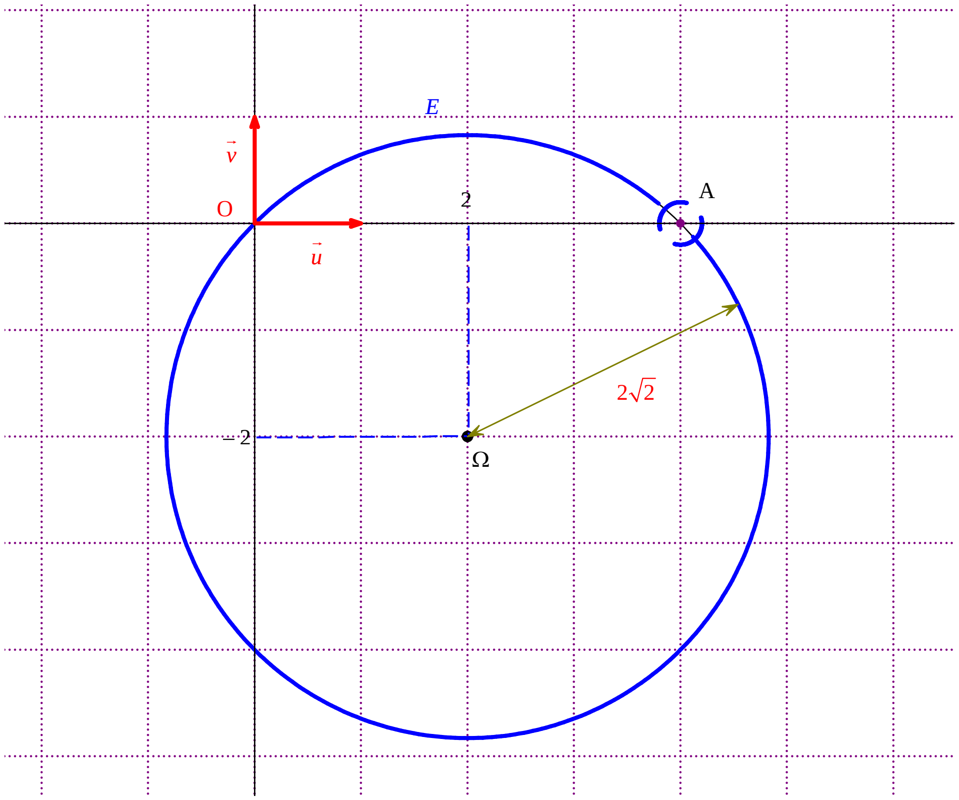
1ère possibilité : $5=1^2+2^2$.
2e possibilité : $5=3^2-2^2$.

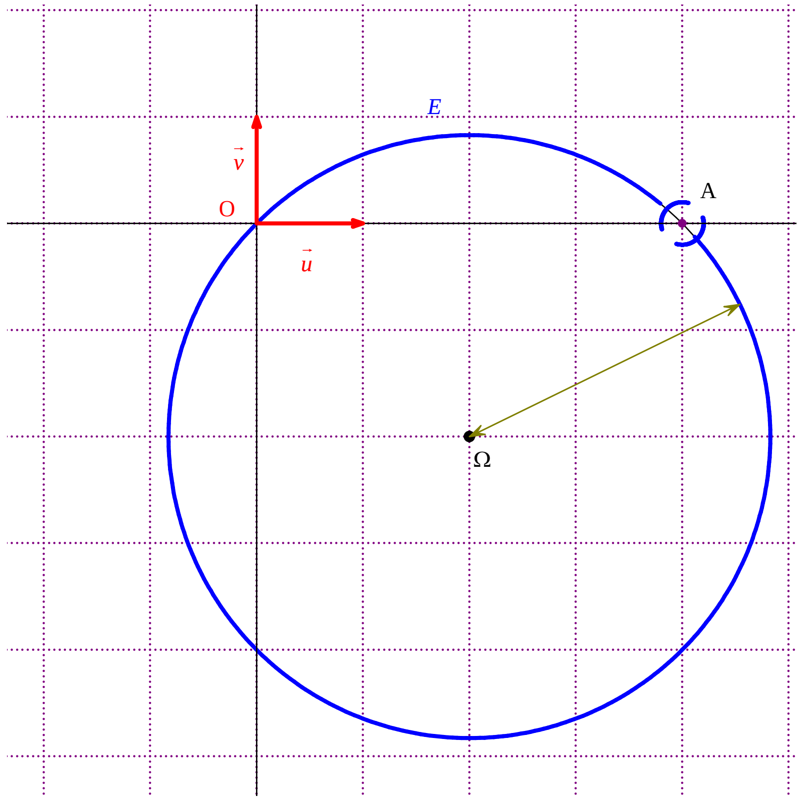
Autre méthode : l'escargot de Pythagore qui permet de construire des segments de longueurs $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$…
Méthode longue et fastidieuse lorsqu'il s'agit l'entier sous le radical est grand.

Enfin, il y a la **méthode de Descartes** qui permet de construire à la règle et au compas un segment de longueur $\sqrt{a}$ connaissant un segment de longueur a.
Cette méthode utilise les relations métriques dans un triangle.

Application :

Ici, pour construire à la règle et au compas, on part de l'égalité $2\sqrt{2}$, on peut observer que $2\sqrt{2}=\sqrt{8}$ et 8 = 4 + 4.
On construit donc un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur 2.





$\boxed{13}$ 1°) $P(Z)=(Z+1)(Z-1)(Z+i)(Z-i)$ 2°) $S=\left\{0\ ;\ -2\ ;\ -\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}\ ;\ -\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}\right\}$

Solution détaillée :

1°) $P(Z)=(Z^2-1)(Z^2+1)=(Z-1)(Z+1)(Z-\mathrm{i})(Z+\mathrm{i})$

$P(Z)=0 \Leftrightarrow (Z+1)(Z-1)(Z+\mathrm{i})(Z-\mathrm{i})=0$

$\Leftrightarrow Z = 1$ ou $Z = -1$ ou $Z = \mathrm{i}$ ou $Z = -\mathrm{i}$

Les solutions de l'équation $P(Z)=0$ sont 1, – 1, i et – i.

2°) $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4=1 \Leftrightarrow \left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4-1=0$

$\Leftrightarrow \frac{2z+1}{z-1}=1$ (1) ou $\frac{2z+1}{z-1}=-1$ (2) ou $\frac{2z+1}{z-1}=\mathrm{i}$ (3) ou $\frac{2z+1}{z-1}=-\mathrm{i}$ (4)

On résout séparément chacune des équations (1), (2), (3) ou (4).
La valeur interdite de chacune de ces équations est 1.

(1) $\Leftrightarrow z=-2$ | (2) $\Leftrightarrow z=0$ | (3) $\Leftrightarrow z=-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}$ | (4) $\Leftrightarrow z=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}$

L'ensemble des solutions de l'équation est $S=\left\{0\ ;\ -2\ ;\ -\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}\ ;\ -\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}\right\}$.

$\boxed{14}$ $S=\left\{1\,;-1\,;\mathrm{i}\sqrt{3}\,;-\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+2z^2-3=0$ (1).

Il s'agit d'une équation bicarrée.
On pose $Z=z^2$.

L'équation s'écrit : $Z^2+2Z-3=0$.
On obtient ainsi une équation du second degré.
Cette dernière équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$: $Z_1=1$ (racine évidente) et $Z_2=-3$ (obtenue par produit).

N.B. : On peut aussi calculer le discriminant $\Delta=16$, ou mieux le discriminant réduit $\Delta'=4$.

Donc $Z=1$ ou $Z=-3$.

Or $Z=z^2$.

Donc (1) $\Leftrightarrow$ $z^2=1$ ou $z^2=-3$
$\Leftrightarrow$ $z=1$ ou $z=-1$ ou $z=\mathrm{i}\sqrt{3}$ ou $z=-\mathrm{i}\sqrt{3}$

L'ensemble des solutions de l'équation est $S=\left\{1\,;-1\,;\mathrm{i}\sqrt{3}\,;-\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$.

$\boxed{15}$ $S=\left\{(1+4\mathrm{i}\ ;1-4\mathrm{i});(1-4\mathrm{i}\ ;1+4\mathrm{i})\right\}$

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{C}^2$ le système $\begin{cases} z+z'=2 & (1)\\ zz'=17 & (2)\end{cases}$

Ce système n'est pas un système linéaire (un système linéaire est un système de la forme $\begin{cases} az+bz'=c\\ a'z+b'z'=c'\end{cases}$) : la 1ère équation est une somme mais la 2e équation est un produit.
Donc la seule méthode de résolution est la méthode de substitution.

$$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z'=2-z\\ zz'=17\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}z'=2-z\\ z(2-z)=17\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}z'=2-z & (1')\\ z^2-2z+17=0 & (2')\end{cases}$$

Considérons le polynôme $z^2-2z+17$.

Recensement des coefficients :

$a=1$; $b=-2$; $c=17$

Calcul du discriminant
$\Delta=b^2-4ac$
$=-64$

On a : $\Delta<0$ donc le polynôme admet 2 racines complexes distinctes conjuguées :

$z_1=\dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$
$z_1=1+4\mathrm{i}$

$z_2=\dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$
$z_2=1-4\mathrm{i}$

1er cas : $z=1+4\mathrm{i}$
L'équation (1') donne alors $z'=1-4\mathrm{i}$.

2e cas : $z=1-4\mathrm{i}$
L'équation (1') donne alors $z'=1+4\mathrm{i}$.

Conclusion :

On peut rédiger de deux manières :

1ère manière : L'ensemble des solutions du système est $S=\left\{(1+4\mathrm{i}\ ;1-4\mathrm{i});(1-4\mathrm{i}\ ;1+4\mathrm{i})\right\}$.
2e manière : Les solutions du système sont les couples $(1+4\mathrm{i}\ ;1-4\mathrm{i})$ et $(1-4\mathrm{i}\ ;1+4\mathrm{i})$.

Mauvaise méthode : poser $z=x+\mathrm{i}y$ et $z'=x'+\mathrm{i}y'$ avec x, y, x', y' réels ; les calculs sont inextricables et n'aboutissent pas.

$\boxed{16}$ Il s'agit d'une équation symétrique du quatrième degré (de la forme $az^4+bz^3+cz^2+bz+a=0$) ; dans ce cas, on utilise toujours le changement de variable $Z=z+\frac{1}{z}$.

3°) Les solutions de $u^2-5u+4=0$ sont les nombres 1 et 4.

4°) $S=\left\{\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ 2+\sqrt{3}\ ;\ 2-\sqrt{3}\right\}$

Solution détaillée :

1°) Vérifions que 0 n'est pas solution de (E).

$0^4-5\times0^3+6\times0^2-5\times0+1=1$ donc 0 n'est pas solution de (E).

2°) Démontrons que (E) est équivalente au système (Σ) $\begin{cases}u^2-5u+4=0\\ u=z+\frac{1}{z}\end{cases}$.

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2 - 5\left(z+\dfrac{1}{z}\right) + 4 = 0 \\ u = z + \dfrac{1}{z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + 2 + \dfrac{1}{z^2} - 5z - \dfrac{5}{z} + 4 = 0 \\ u = z + \dfrac{1}{z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(z^2 + 2 + \dfrac{1}{z^2} - 5z - \dfrac{5}{z} + 4\right) \times z^2 = 0 \times z^2 \\ u = z + \dfrac{1}{z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0 \\ u = z + \dfrac{1}{z} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (E)

3°) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $u^2 - 5u + 4 = 0$.

L'équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$: $u_1 = 1$ (racine évidente) et $u_2 = 4$ (obtenue par produit).

4°) Déduisons-en les solutions de (E).

$$(\text{E}) \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \quad \text{ou} \quad u = 4 \\ u = z + \dfrac{1}{z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = 4 \quad \text{ou} \quad z + \frac{1}{z} = 4$$

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation (E).

$$S = \left\{ \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \; \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \; 2+\sqrt{3} \; ; \; 2-\sqrt{3} \right\}$$

$\boxed{17}$ **Méthode :** changement d'inconnue $Z = \dfrac{z-3\mathrm{i}}{z+2}$; $S = \left\{ -\dfrac{7}{4} - \dfrac{5\mathrm{i}}{4} \; ; \; -\dfrac{13}{4} - \dfrac{\mathrm{i}}{4} \right\}$

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{z-3\mathrm{i}}{z+2}\right)^2 - 6\left(\dfrac{z-3\mathrm{i}}{z+2}\right) + 13 = 0$ (1).

On pose $Z = \dfrac{z-3\mathrm{i}}{z+2}$.

L'équation s'écrit : $Z^2 - 6Z + 13 = 0$.

Considérons le polynôme $Z^2 - 6Z + 13$.

Le discriminant $\Delta = -16$.

On a : $\Delta < 0$ donc le polynôme admet 2 racines complexes distinctes conjuguées : $Z_1 = 3 - 2\mathrm{i}$ et $Z_2 = 3 + 2\mathrm{i}$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{z-3\mathrm{i}}{z+2} = 3 - 2\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad \frac{z-3\mathrm{i}}{z+2} = 3 - 2\mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{7}{4} - \frac{5\mathrm{i}}{4} \quad \text{ou} \quad z = -\frac{13}{4} - \frac{\mathrm{i}}{4}$$

$\boxed{18}$ Faire une figure dans le plan complexe en plaçant les points A, B, C, D.

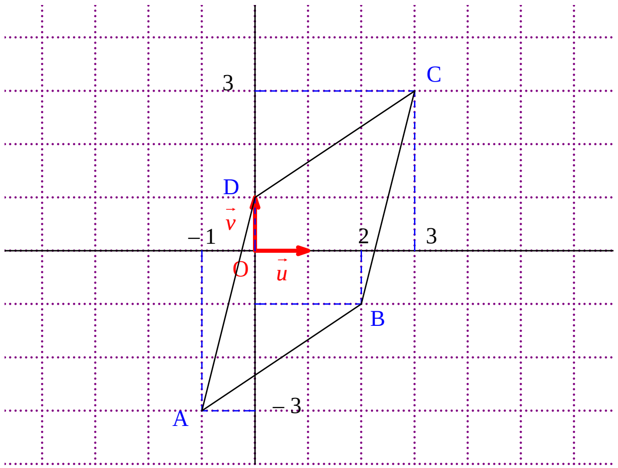
On calcule $z_{\overrightarrow{AB}}$ et $z_{\overrightarrow{DC}}$. On constate que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.

Rappel de méthode : pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme à l'aide des vecteurs, il suffit de démontrer que l'on a deux vecteurs égaux (on n'utilise pas la colinéarité).

Solution détaillée :

A(– 1 – 3i)   B(2 – i)   C(3 + 3i)   D(i)

Déterminons la nature du quadrilatère ABCD.



On calcule $z_{\overrightarrow{AB}}$ et $z_{\overrightarrow{DC}}$.

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

$$= (2 - i) - (-1 - 3i)$$
$$= 3 + 2i$$

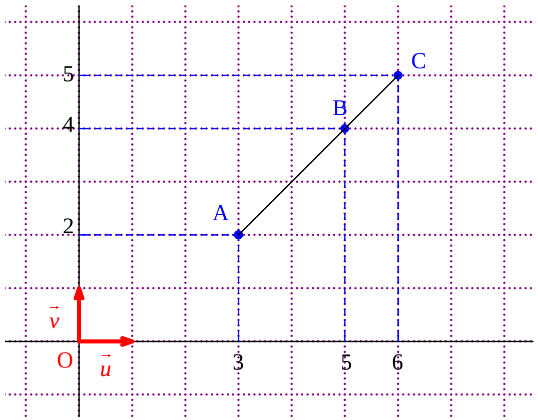
$$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D$$
$$= (3 + 3i) - i$$
$$= 3 + 2i$$

On constate que $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Par suite, ABCD est un parallélogramme.

Bilan de la méthode :

Pour démontrer qu'un quadrilatère ABCD est un parallélogramme, il suffit de démontrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

19 Faire une figure dans le plan complexe en plaçant les points A, B, C.



A(3 + 2i) B(5 + 4i) C(6 + 5i)

Démontrons que A, B, C sont alignés.

On calcule $z_{\overrightarrow{AB}}$ et $z_{\overrightarrow{AC}}$.

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$
$$= (5 + 4i) - (3 + 2i)$$
$$= 2 + 2i$$

$$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A$$
$$= (6 + 5i) - (3 + 2i)$$
$$= 3 + 3i$$

On constate que $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
Par suite A, B, C sont alignés.

Bilan de la méthode :

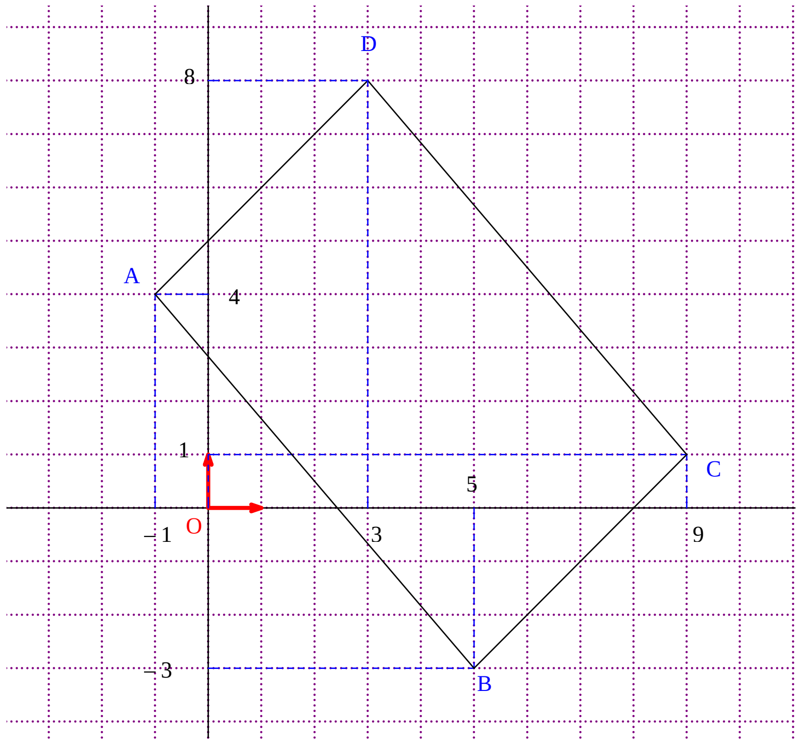
Pour démontrer que deux vecteurs $\vec{w}(z)$ et $\vec{w}'(z')$ sont colinéaires, on cherche un réel λ tel que $z' = \lambda z$.

20 On rédige ainsi sous forme d'une chaîne d'équivalences :
« ABCD est un parallélogramme ⇔ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
⇔ … »

On trouve : D(3 + 8i).

Solution détaillée :

A(– 1 + 4i), B(5 – 3i) et C(9 + i).



Déterminons l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}\\
&\Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D\\
&\Leftrightarrow (5-3i)-(-1+4i)=(9+i)-z_D\\
&\Leftrightarrow 6-7i = 9+i-z_D\\
&\Leftrightarrow z_D = 9+i-6+7i\\
&\Leftrightarrow z_D = 3+8i
\end{aligned}$$

$\boxed{21}$ $P(z) = z^3-(2+3i)z^2+3(1+2i)z-9i$

1°) a) On calcule $P(ix) = \underbrace{2x^2-6x}_{\text{partie réelle}} + i\underbrace{\left(-x^3+3x^2+3x-9\right)}_{\text{partie imaginaire}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Solution détaillée :

$$\begin{aligned}
P(ix) &= (ix)^3-(2+3i)(ix)^2+3(1+2i)(ix)-9i\\
&= i^3x^3-(2+3i)i^2x^2+3(1+2i)ix-9i\\
&= -i^2\times ix^3-(2+3i)(-1)x^2+3(1+2i)ix-9i\\
&= -ix^3+2x^2+3ix^2+3ix+6i^2x-9i\\
&= 2x^2-6x-ix^3+3ix^2+3ix-9i\\
&= 2x^2-6x+i\left(-x^3+3x^2+3x-9\right)
\end{aligned}$$

b) Cherchons les réels x tels que $P(ix) = 0$.

$$P(ix)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-6x=0 & (1)\\ -x^3+3x^2+3x-9=0 & (2)\end{cases}$$

En effet un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle est nulle et sa partie imaginaire est nulle.

(1) $\Leftrightarrow 2x\,(x-3)=0$

$\Leftrightarrow x(x-3)=0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$

On remplace les valeurs trouvées dans la deuxième équation et on vérifie que seule la valeur 3 est solution de la deuxième équation.

Conclusion : 3i est racine imaginaire pure du polynôme $P(z)$ puisque $P(3i)=0$.

On peut raisonner par **condition nécessaire** et **condition suffisante**.

(N.B. : on peut aussi utiliser ensuite la factorisation :
$-x^3+3x^2+3x-9=-x^2(x-3)+3(x-3)=(x-3)(3-x^2)$).

2°) 3i est racine du polynôme $P(z)$ donc le polynôme est factorisable par $z-3i$ d'après la propriété rappelée ci-dessous.

Rappel du théorème de factorisation (vu en 1ère mais à la limite du programme) : résultat fondamental sur les polynômes

Soit $P(z)$ un polynôme. Si α est racine de $P(z)$, alors le polynôme est factorisable par $z-\alpha$.

Il existe donc un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z)=(z-3i)\times Q(z)$.

Or $\deg P(z)=3$ et $\deg(z-3i)=1$ donc $\deg Q(z)=2$.

Il existe trois nombres complexes a, b, c ($a\neq 0$) tels que $P(z)=(z-3i)\times\left(az^2+bz+c\right)$.

Il y a **3 méthodes :**

• **Méthode des coefficients indéterminés :** on développe $(z-3i)\times\left(az^2+bz+c\right)$ et on identifie avec les coefficients de $P(z)$.

$$\begin{aligned}
(z-3i)\times\left(az^2+bz+c\right) &= az^3+bz^2+cz-3iaz^2-3ibz-3ic\\
&= az^3+(b-3ia)z^2+(c-3ib)z-3ic
\end{aligned}$$

Pour développer très rapidement on procède ainsi :
- pour obtenir z^3, il faut multiplier z par z^2 ;
- pour obtenir z^2, il faut multiplier z par z ou multiplier un nombre par z^2 ;
- pour obtenir z, il faut multiplier z par un nombre
- pour obtenir un nombre, il faut multiplier deux nombres.

Donc par identification des coefficients des monômes de même degré, on obtient le système.

$$(S)\begin{cases} a=1\\ b-3ia=-2-3ia\\ c-3ib=3+6i\\ -3ic=-9i\end{cases}$$

On obtient un système linéaire de quatre équations à trois inconnues dont deux sont prérésolues (la première et la dernière).

La première équation donne : $a = 1$.
La dernière équation donne : $c = 3$.
On prend ensuite la deuxième équation en remplaçant a par 1 : $b\cancel{-3i\times 1}=-2\cancel{-3i\times 1}$.
Les – 3i se simplifient de part et d'autre de l'égalité ; il reste alors $b = -2$.

La troisième équation est alors vérifiée.

On obtient ainsi : $\begin{cases} a=1\\ b=-2\\ c=3\end{cases}$

• **Division euclidienne de polynômes :** on fait la division euclidienne de $P(z)$ par $(z-3\text{i})$.

$$\begin{array}{r|l} z^3-(2+3\text{i})z^2+3(1+2\text{i})z-9\text{i} & z-3\text{i} \\ \cline{2-2} -\left(z^3-3\text{i}z^2\right) & z^2-2z+3 \\ \cline{1-1} -2z^2+3(1+2\text{i})z-9\text{i} & \\ -\left(-2z^2+6\text{i}z\right) & \\ \cline{1-1} 3z-9\text{i} & \\ -(3z-9\text{i}) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Le reste est nul.

• **Schéma de Hörner (Algorithme)**

$P(z)=z^3-(2+3\text{i})z^2+3(1+2\text{i})z-9\text{i}$

On doit déterminer trois nombres complexes *a*, *b*, *c* tels que $P(z)=(z-3\text{i})\times\left(az^2+bz+c\right)$.

1	$-(2+3\text{i})$	$3(1+2\text{i})$	-9i
1 $\times 3\text{i}$	3i $=$ $\downarrow$ $\times 3\text{i}$ -2	-6i $=$ $\downarrow$ $\times 3\text{i}$ 3	9i $=$ $\downarrow$ $\boxed{0}$ $P(3\text{i})$

Sur la 1ère ligne, on met les coefficients de $P(z)$.

On redescend le 1er coefficient sur la 2e ligne.

Les flèches verticales correspondent à des additions.

Les nombres sur la deuxième ligne sont dans cet ordre les nombres *a*, *b*, *c* cherchés.
On en déduit que $P(3\text{i})=0$ et que $P(z)=(z-3\text{i})\left(z^2-2z+3\right)$.

3°) Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) sont : 3i ; $1+\text{i}\sqrt{2}$; $1-\text{i}\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} P(z)=0 &\Leftrightarrow (z-3\text{i})\left(z^2-2z+3\right)=0 \\ &\Leftrightarrow z-3\text{i}=0 \text{ ou } z^2-2z+3=0 \\ &\Leftrightarrow z=3\text{i} \text{ ou } z^2-2z+3=0 \end{aligned}$$

Considérons le polynôme z^2-2z+3.
Son discriminant réduit est égal à Δ' = – 2.*

On a : Δ' < 0 donc le polynôme admet 2 racines complexes distinctes conjuguées :

$z_1=\dfrac{-b'-\text{i}\sqrt{-\Delta'}}{a}$ $\qquad$ $z_2=\dfrac{-b'+\text{i}\sqrt{-\Delta'}}{a}$

$z_1=1-\text{i}\sqrt{2}$ $\qquad$ $z_2=1+\text{i}\sqrt{2}$

Soit S l'ensemble des solutions de (E).

S = { 3i ; $1+\text{i}\sqrt{2}$; $1-\text{i}\sqrt{2}$ }
(Les solutions ne sont pas ordonnées, car il n'y a pas d'ordre dans l'ensemble des nombres complexes et puis un ensemble de solutions avec accolades ne nécessite pas d'ordonner les solutions).

* Considérons le polynôme z^2-2z+3.
Son discriminant est égal à Δ = 4 – 4 × 3 = – 8.

On a : Δ < 0 donc le polynôme admet 2 racines complexes distinctes conjuguées :

$$z_1=\frac{-b-\text{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{2-\text{i}\sqrt{8}}{2}=1-\text{i}\sqrt{2} \qquad z_2=\frac{-b+\text{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{2+\text{i}\sqrt{8}}{2}=1+\text{i}\sqrt{2}$$

$\boxed{22}$ Poser *z* = *a* + i*b* avec *a* et *b* réels.
On trouve : $S=\left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\ ;\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+\overline{z}-1=0$ (E).

Attention ce n'est pas une équation du second degré à cause de la présence du conjugué.

Résoudre l'équation (E) c'est déterminer tous les nombres complexes *z* telles que l'égalité soit vraie.

On pose *z* = *a* + i*b* avec *a* et *b* réels.
(On peut dire que *z* est une expression en fonction de *a* et de *b*, ce qui peut un peu « embrouiller »)
Donc finalement résoudre (E) dans $\mathbb{C}$ revient à trouver les valeurs de *a* et de *b* (qui sont des réels) que telles que l'égalité soit vraie.

$$\begin{aligned} \text{(E)} &\Leftrightarrow (a+\text{i}b)^2+(a-\text{i}b)-1=0 \\ &\Leftrightarrow a^2+2a\text{i}b-b^2+a-\text{i}b-1=0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{a^2-b^2+a-1}+\text{i}\boxed{b(2a-1)}=0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2+a-1=0 & (1) \\ b(2a-1)=0 & (2) \end{cases}$$

On obtient un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui n'est pas linéaire.

On prend l'équation (2). On trouve soit b soit a. On remplace dans l'équation (2).

(2) $\Leftrightarrow$ $b = 0$ ou $2a-1=0$ (règle d'un produit de facteurs, c'est bien un « ou »)

$\Leftrightarrow$ $b = 0$ ou $a=\dfrac{1}{2}$

1[er] cas : $b = 0$

Dans ce cas, l'équation (1) donne $a^2+a-1=0$.
Considérons le polynôme x^2+x-1 ($x\in\mathbb{R}$). Attention, on considère un polynôme dont la variable est un réel car a est un réel.

Le discriminant du polynôme est égal à $\Delta = 1 - 4 \times (-1) = 5$.

$\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

x_1 et x_2 sont les racines du polynôme.

On a ainsi déterminé deux valeurs de a donc on obtient deux solutions de (E) (équation de départ) :
$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}+\mathrm{i}\times 0=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}+\mathrm{i}\times 0=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

2[e] cas : $a=\dfrac{1}{2}$

Dans ce cas, l'équation (1) donne $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-b^2+\dfrac{1}{2}-1=0$ soit $b^2=-\dfrac{1}{4}$ (impossible pour $b\in\mathbb{R}$).
Dans ce cas, il n'y a pas de valeur possible pour b. Il n'y a donc pas de solution pour l'équation (E).

Conclusion :

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S=\left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\ ;\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Ou

Les solutions de (E) sont $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Variante dans la résolution :

$$\text{(E)} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2+a-1=0 \\ b=0 \ \text{ ou } \ a=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2+a-1=0 \\ b=0 \ \text{ ou } \ a=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2+a-1=0 \\ b=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a^2-b^2+a-1=0 \\ a=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

On obtient deux systèmes dont les inconnues sont des réels.

On résout chaque système par substitution (systèmes non linéaires à cause de la présence des carrés).

(I) $\begin{cases} a^2-b^2+a-1=0 \\ b=0 \end{cases}$

Le 1[er] système a deux solutions : $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\ ;0\right)$ et $\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\ ;0\right)$

(II) $\begin{cases} a^2-b^2+a-1=0 \\ a=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Le 2[e] système n'a pas de solution.
Non linéaire : il peut y avoir plus d'une solution.

Rappel de logique mathématique : distributivité du « et » sur le « ou »

A, B, C sont des propositions mathématiques.

Les propositions « A et (B ou C) » et « (A et B) ou (A et C) » sont équivalentes (principe de logique).

A : $a^2-b^2+a-1=0$ B : $b=0$ C : $a=\frac{1}{2}$

Rappel :

Dans un système, l'accolade signifie « et ».
Très important et néanmoins rarement dit.

Dans cet exercice, on a adopté cette méthode uniquement à cause de la présence du $\overline{z}$.

S'il n'y avait pas de $\overline{z}$, l'équation s'écrirait $z^2+z-1=0$.
On aurait une équation du second degré. On utiliserait alors la méthode de résolution classique avec le discriminant mais on ne poserait pas $z=a+ib$ sous peine d'obtenir des calculs inextricables !

$z^2-\overline{z}+\frac{1}{4}=0$

$S=\left\{\frac{1}{2}\,;\frac{-1}{2}+\mathrm{i}\,;\frac{-1}{2}-\mathrm{i}\right\}$

Complément : discriminant réduit

$az^2+bz+c\neq 0 \quad (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ a\neq 0$
On pose $b=2b'$.

$\boxed{\Delta=b'^2-ac}$ (formule du discriminant réduit)

1er cas : $\boxed{\Delta'>0}$ L'équation admet 2 racines réelles distinctes : $z_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $z_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$.

2e cas : $\boxed{\Delta'=0}$ L'équation admet 1 racine réelle double : $z_0=-\frac{b'}{a}$.

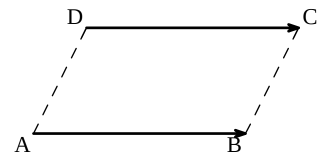
3e cas : $\boxed{\Delta'<0}$ L'équation admet 2 racines complexes conjuguées : $z_1=\frac{-b'-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta'}}{a}$ et $z_2=\frac{-b'+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta'}}{a}$.

On utilise ces formules lorsque b est un entier pair ; on obtient alors les expressions des solutions déjà simplifiées.

RAPPELS SUR LES VECTEURS

Égalité vectorielle

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme.



Vecteurs colinéaires

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\vec{u}$ soit non nul.
  $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.
- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
- Les points A, B, C sont alignés $\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Les droites (AB) et (CD) ($A\neq B$ et $C\neq D$) sont parallèles $\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Milieu

I milieu de [AB] $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$