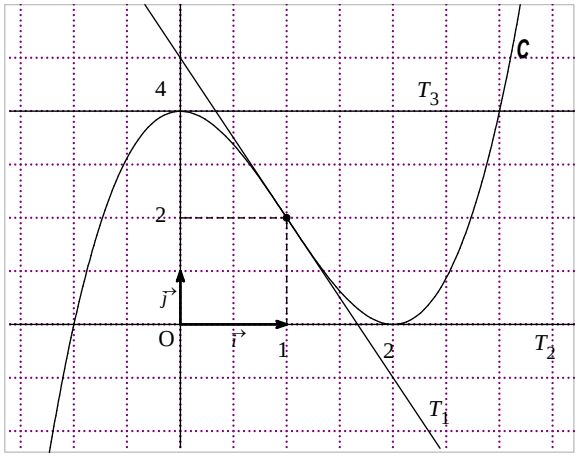
TS 3 Devoir pour le vendredi 27 novembre 2009

I. Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Les droites T_1, T_2 et T_3 sont les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses respectives 1, 2 et 0.



Soit g la fonction définie par $g = f \circ f$ et h la fonction définie par $h(x) = f(x^2)$.

1°) En utilisant le graphique, lire $f(1)$ et $f'(1)$.

2°) En déduire $g'(1)$.

3°) De même, déterminer $h'(1)$.

II. Pour tout réel k, on considère la fonction f_k définie par $f_k(x) = x + k\mathrm{e}^{-x}$ et on note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier une propriété des courbes $\mathcal{C}_k$.

1°) Travail informatique sur ordinateur (utilisation du logiciel *Geogebra*)

a) Définir un paramètre réel k à l'aide du bouton Curseur (6e colonne de boutons en partant de la gauche).
Il faut cliquer à un endroit quelconque de la figure.
Il faut choisir des bornes pour k ; on peut par exemple prendre –10 et 10 pour bornes de k.
b) Dans *Saisie*, taper : $x + k * \exp(-x)$. Appuyer sur *Entrée*.
La fonction correspondante est appelée f.
On obtient ainsi le tracé de la courbe $\mathcal{C}_k$.
c) Tracer la tangente à $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse -1. Pour cela, une commande est intégrée dans le logiciel :
dans *Saisie* on tape Tangente[– 1 , *f*]. On peut faire apparaître cette tangente en couleur si on le désire.
d) On va faire varier k. Pour cela, cliquer sur le bouton *Déplacer* (1er bouton en partant de la gauche) puis retourner sur le curseur en cliquant dessus.
On peut aussi cliquer sur la courbe et sur la tangente et sélectionner le mode *Trace activée*. Cependant, la figure devient alors peu lisible.
Que peut-on conjecturer pour toutes les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_k$ aux points d'abscisses -1 ?

2°) Travail sur papier

Démontrer la conjecture émise au 1°).

III. L'objectif de cet exercice est d'étudier les propriétés des courbes représentatives d'une famille de fonctions à l'aide d'un logiciel de tracé de courbe.

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie par $f_k(x) = x + \dfrac{1 - k\mathrm{e}^x}{1 + k\mathrm{e}^x}$ et on note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Travail informatique sur ordinateur (utilisation du logiciel *Geogebra*)

Suivre la même démarche que dans l'exercice précédent pour faire apparaître sur l'écran un certain nombre de courbes $\mathcal{C}_k$.
Conjecturer l'existence de deux asymptotes obliques Δ et Δ' communes à toutes les courbes en $+\infty$ et en $-\infty$.

2°) Travail sur papier

Démontrer cette conjecture.

IV. 1°) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^3 2x$. .

Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée (on utilisera la réécriture $f(x) = (\cos 2x)^3$).

2°) Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{\sin^2 2x}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de g.
b) Démontrer que g est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer sa dérivée.

TS 3

Corrigé du devoir pour le 27 novembre 2009

I.

1°) $f(1)=2$; $f'(1)=-3$ (lecture graphique du coefficient directeur de la tangente)

2°) $g = f \circ f$

Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'après la formule de dérivation d'une composée,

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = f'(x) \times f'\left[f(x)\right]$.

Donc $g'(1) = f'(1) \times f'\left[f(1)\right] = -3 \times f'(2) = -3 \times 0 = 0$.

3°) $h = f \circ u$ où u est la fonction carrée.

Comme u et f sont dérivables sur $\mathbb{R}$, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'après la formule de dérivation d'une composée,

$h'(x) = u'(x) \times f'\left[u(x)\right] = 2x \times f'\left(x^2\right)$

$h'(1) = 2 \times 1 \times f'(1) = 2 \times (-3) = -6$.

II. 1°) **Utilisation d'un logiciel de tracé de courbes**

Il semble que toutes les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_k$ aux points d'abscisses -1 passent par l'origine du repère.

2°) **Démonstration**

f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les règles sur les opérations algébriques de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_k'(x) = 1 - k\mathrm{e}^{-x}$

L'équation réduite de la tangente T_k de la tangente à $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse -1 s'écrit :

$y = f_k'(-1) \times (x+1) + f_k(-1)$

$y = (1-k\mathrm{e}) \times (x+1) - 1 + k\mathrm{e}$

$y = (1-k\mathrm{e})x + \cancel{1} \cancel{-k\mathrm{e}} \cancel{-1} \cancel{+k\mathrm{e}}$

$y = (1-k\mathrm{e})x$

Cette équation permet de dire que T_k passe par l'origine O du repère.

III. 2°) D'après l'ordinateur, il semble que pour tout réel k strictement positif, la courbe $\mathcal{C}_k$ admet la droite Δ d'équation $y = x-1$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et la droite Δ' d'équation $y = x+1$ pour asymptote oblique en $-\infty$.

3°) **Démonstration**

En $+\infty$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - (x-1) = \dfrac{2}{\mathrm{e}^x + 1}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (\mathrm{e}^x + 1) = +\infty \end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\mathrm{e}^x + 1} = 0$.

D'où $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x-1)\right] = 0}$

Par suite, la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = x-1$ pour asymptote oblique en $+\infty$.

En $-\infty$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - (x+1) = \dfrac{-2k\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} (-2k\mathrm{e}^x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (\mathrm{e}^x + 1) = 1 \end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2k\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = 0$

D'où $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (x+1)\right] = 0}$

Par suite, la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ' d'équation $y = x+1$ pour asymptote oblique en $-\infty$.

IV. Méthode : utiliser directement les formules de dérivation sans repasser par les composées

$\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$	$\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$

1°) On a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \cos^3 2x = (\cos 2x)^3$ donc : $f = u^3$ avec $u(x) = \cos 2x$.

u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:

$f' = 3u^2 \times u'$.

$u'(x) = -2\sin 2x$.

D'où : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3(\cos 2x)^2 \times (-2\sin 2x)$

$f'(x) = -6\sin 2x \ \cos^2 2x$

<u>*Remarque :*</u> *On peut aussi écrire :* $f'(x) = -6\sin 2x \times \cos 2x \times \cos 2x = -6\sin 4x \times \cos 2x$.

2°) $g(x)$ existe si et seulement si $\sin 2x \neq 0$.

Or : $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Donc g est définie sur $\boldsymbol{D} = \mathbb{R} \backslash \{ \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \}$.

Pour tout $x \in \boldsymbol{D}$, on a : $g(x) = \frac{1}{\sin^2 2x}$ donc $g = \frac{1}{u^2}$ avec $u(x) = \sin 2x$.

u dérivable sur $\boldsymbol{D}$ et $u \neq 0$ sur $\boldsymbol{D}$.

Donc f est dérivable sur $\boldsymbol{D}$:

$g' = -2\frac{u'}{u^3}$ avec : $u'(x) = 2\cos 2x$.

D'où : $\forall x \in \boldsymbol{D}$ $g'(x) = -2\frac{2\cos 2x}{(\sin 2x)^3} = \frac{-4\cos 2x}{\sin^3 2x}$.