

# 1<sup>ère</sup> S Chapitre 14 Barycentres de trois points ou plus

## I. Définition

### 1°) Etude dans le cas général

#### Hypothèses

A, B, C sont trois points quelconques.

a, b, c sont trois réels quelconques tels que  $a + b + c \neq 0$ .

**But** : déterminer la position du point G tel que  $a\overline{GA} + b\overline{GB} + c\overline{GC} = \vec{0}$ .

On décompose  $\overline{GB}$  et  $\overline{GC}$  en utilisant le point A.

$$\begin{aligned} (a+b+c)\overline{GA} + b\overline{AB} + c\overline{AC} &= \vec{0} \\ (a+b+c)\overline{GA} &= -(b\overline{AB} + c\overline{AC}) \\ \overline{AG} &= \frac{b}{a+b+c}\overline{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overline{AC} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (a+b+c)\overline{GA} + b\overline{AB} + c\overline{AC} &= \vec{0} \\ (a+b+c)\overline{GA} &= -(b\overline{AB} + c\overline{AC}) \end{aligned}} \right) : (a+b+c) \quad (a+b+c \neq 0)$$

### 2°) Définition

A, B, C sont trois points quelconques du plan

a, b, c sont trois réels quelconques tels que  $a + b + c \neq 0$ .

Il existe un unique point G tel que  $a\overline{GA} + b\overline{GB} + c\overline{GC} = \vec{0}$ .

Ce point G est appelé le **barycentre** des points pondérés (A ; a), (B ; b) et (C ; c).

### 3°) Généralisation

La définition se généralise à plus de trois points.

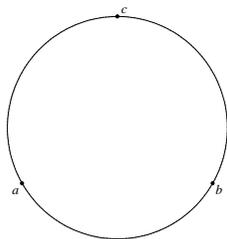
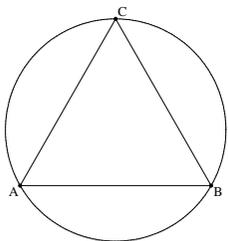
## II. Egalité de position

### 1°) Règle

G : barycentre des points pondérés (A ; a), (B ; b), (C ; c) ( $a + b + c \neq 0$ ).

$$\overline{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overline{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overline{AC}.$$

Permutation circulaire des lettres A, B, C et des lettres a, b, c.



On obtient :

$$\overline{BG} = \frac{a}{a+b+c}\overline{BA} + \frac{c}{a+b+c}\overline{BC}$$

$$\overline{CG} = \frac{a}{a+b+c}\overline{CA} + \frac{b}{a+b+c}\overline{CB}$$

### 2°) Vocabulaire

- Les nombre a, b, c sont appelés « **coefficients de pondération** ».
- On parle parfois du **système** {(A ; a), (B ; b), (C ; c)}.
- Le nombre  $a + b + c$  est parfois appelé la « **masse totale** » du système.
- Le barycentre n'existe pas lorsque  $a + b + c = 0$ .

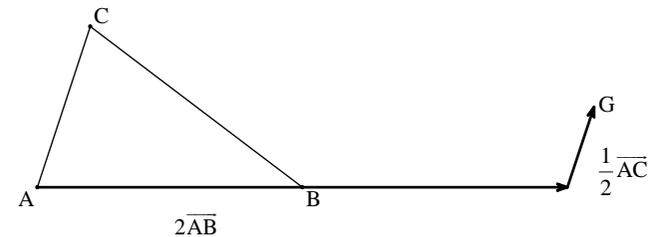
### 3°) Exercice

ABC est un triangle quelconque.

G : barycentre des points pondérés (A ; -3), (B ; 4) ; (C ; 1).

Construire G.

D'après l'égalité de position, on a :  $\overline{AG} = 2\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC}$ .



## III. Propriété d'homogénéité

### 1°) Règle

Si G est le barycentre des points pondérés (A ; a), (B ; b), (C ; c) ( $a + b + c \neq 0$ ),

alors pour tout réel  $k \neq 0$ , G est aussi le barycentre des points pondérés (A ; ka), (B ; kb), (C ; kc).

### 2°) Démonstration

Par définition, on a :  $a\overline{GA} + b\overline{GB} + c\overline{GC} = \vec{0}$ .

En multipliant les deux membres de cette égalité par k, on obtient :

$$ka\overline{GA} + kb\overline{GB} + kc\overline{GC} = \vec{0}.$$

On a :  $ka + kb + kc = k(a + b + c)$ .

Or  $a + b + c \neq 0$  et  $k \neq 0$  donc  $ka + kb + kc \neq 0$ .

Par suite, cette égalité vectorielle exprime que G est aussi le barycentre des points pondérés (A ; ka), (B ; kb), (C ; kc).

#### IV. Relation fondamentale

##### 1°) Enoncé

G est le barycentre des points pondérés (A ; a), (B ; b), (C ; c) ( $a+b+c \neq 0$ ).  
 Pour tout M du plan, on a :  $a\overline{MA} + b\overline{MB} + c\overline{MC} = (a+b+c)\overline{MG}$ .

##### 2°) Démonstration

$$\begin{aligned} a\overline{MA} + b\overline{MB} + c\overline{MC} &= a(\overline{MG} + \overline{GA}) + b(\overline{MG} + \overline{GB}) + c(\overline{MG} + \overline{GC}) \\ &= a\overline{MG} + a\overline{GA} + b\overline{MG} + b\overline{GB} + c\overline{MG} + c\overline{GC} \\ &= (a+b+c)\overline{MG} + \underbrace{a\overline{GA} + b\overline{GB} + c\overline{GC}}_0 \end{aligned}$$

Par définition,  $a\overline{GA} + b\overline{GB} + c\overline{GC} = \vec{0}$ .

Donc  $\forall M \in P \quad a\overline{MA} + b\overline{MB} + c\overline{MC} = (a+b+c)\overline{MG}$

**N.B. :** on pourrait faire un exemple de construction vectorielle permettant de vérifier la relation fondamentale.

##### 3°) Utilisation

La relation fondamentale est une égalité valable pour tout point M.  
 On dit qu'il s'agit d'un énoncé universel ( $\forall$  : « quantificateur universel »).  
 On peut particulariser le point M.

Pour M = A, on obtient l'égalité vectorielle  $b\overline{AB} + c\overline{AC} = (a+b+c)\overline{AG}$  (égalité de position)

Pour M = B, on obtient l'égalité vectorielle  $a\overline{BA} + c\overline{BC} = (a+b+c)\overline{BG}$  (égalité de position)

Pour M = C, on obtient l'égalité vectorielle  $a\overline{CA} + b\overline{CB} = (a+b+c)\overline{CG}$  (égalité de position)

**4°) Réduction de la somme vectorielle  $a\overline{MA} + b\overline{MB} + c\overline{MC}$**  (A, B, C sont trois points fixés et a, b, c trois réels fixés)

M est un point quelconque.

<b>2 cas</b>	Si $a+b+c \neq 0$ $a\overline{MA} + b\overline{MB} + c\overline{MC} = (a+b+c)\overline{MG}$ avec G est le barycentre des points pondérés (A ; a), (B ; b), (C ; c).
	Si $a+b+c = 0$ $a\overline{MA} + b\overline{MB} + c\overline{MC}$ est un vecteur constant indépendant de M (ne pas dire que c'est le vecteur nul).

$$\begin{aligned} a\overline{MA} + b\overline{MB} + c\overline{MC} &= a\overline{MA} + b(\overline{MA} + \overline{AB}) + c(\overline{MA} + \overline{AC}) \\ &= \underbrace{(a+b+c)\overline{MA}}_0 + b\overline{AB} + c\overline{AC} \\ &= b\overline{AB} + c\overline{AC} \end{aligned}$$

#### V. Coordonnées dans un repère

##### 1°) Règle

Dans le plan muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , le barycentre G des points pondérés (A ; a), (B ; b), (C ; c) ( $a+b+c \neq 0$ ) a pour coordonnées

$$\begin{cases} x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} \\ y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c} \end{cases}$$

##### 2°) Démonstration

$$a\overline{GA} + b\overline{GB} + c\overline{GC} = \vec{0}$$

Cette égalité vectorielle se traduit en coordonnées par :

$$\begin{cases} a(x_A - x_G) + b(x_B - x_G) + c(x_C - x_G) = 0 \\ a(y_A - y_G) + b(y_B - y_G) + c(y_C - y_G) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax_A + bx_B + cx_C - (a+b+c)x_G = 0 \\ ay_A + by_B + cy_C - (a+b+c)y_G = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax_A + bx_B + cx_C = (a+b+c)x_G \\ ay_A + by_B + cy_C = (a+b+c)y_G \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} \\ y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c} \end{cases}$$

On divise les égalités par  $a+b+c$  ( $a+b+c \neq 0$ )

#### VI. Barycentre partiel

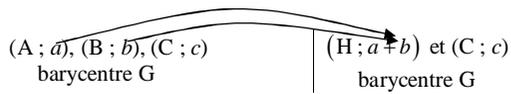
##### 1°) Règle du barycentre partiel

A, B, C sont trois points quelconque du plan.  
 a, b, c sont trois réels tels que  $a+b+c \neq 0$  et  $a+b \neq 0$ .  
 Si G est le barycentre des points pondérés (A ; a), (B ; b), (C ; c) ( $h_1$ )  
 et H est le barycentre des points pondérés (A ; a) et (B ; b) ( $h_2$ ),  
 alors G est le barycentre des points pondérés (H ; a+b) et (C ; c).

##### Explications

##### • 1<sup>ère</sup> explication :

On crée un barycentre.

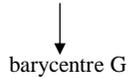


$(A; a)$  et  $(B; b)$   
barycentre H

● 2<sup>e</sup> explication :

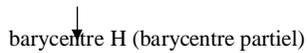
**Système de 3 points pondérés**

$(A; a), (B; b), (C; c)$  ( $a+b+c \neq 0$ )



« Sous-système » de deux points pondérés ( $a+b \neq 0$ )

$(A; a)$  et  $(B; b)$  ( $a+b \neq 0$ )



On peut dire que G est le barycentre des points pondérés  $(H; a+b)$  et  $(C; c)$ .

2°) Exemples

● Exemple 1

$(A; 1), (B; 2), (C; 3), (D; 4)$

barycentre G

**Associations possibles :**

1) On prend les deux premiers points puis les deux suivants :

$(A; 1), (B; 2), (C; 3), (D; 4)$   
H K

Donc G barycentre de  $(H; 3)$  et  $(K; 7)$ .

2) On prend les trois premiers points puis on laisse le dernier intact.

$(A; 1), (B; 2), (C; 3), (D; 4)$   
H

Donc G barycentre de  $(H; 6)$  et  $(D; 4)$ .

Il y a d'autres associations possibles...

● Exemple 2

On a un barycentre de 3 points :

G :  $(A; 1), (B; 2), (C; 3)$

Donc on va regrouper les deux premiers points pondérés en un seul point pondéré.

On va additionner les coefficients et on va créer un nouveau point.

On l'appelle  $(H; 3)$ .



Du coup, ça sera le premier point et le deuxième point pondéré ça sera  $(C; 3)$  (celui qu'on n'a pas « touché »).

3°) Démonstration

(h<sub>1</sub>) : G est le barycentre des points pondérés  $(A; a), (B; b), (C; c)$

(h<sub>2</sub>) : H est le barycentre des points pondérés  $(A; a)$  et  $(B; b)$

Démontrons que G est le barycentre des points pondérés  $(H; a+b)$  et  $(C; c)$ .

(h<sub>1</sub>) permet d'écrire  $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .  
relation de Chasles en introduisant H

$$a(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HA}) + b(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HB}) + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$(a+b)\overrightarrow{GH} + \underbrace{a\overrightarrow{HA} + b\overrightarrow{HB}}_0 + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

d'après h<sub>2</sub>

Donc :  $(a+b)\overrightarrow{GH} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

On en déduit que G est le barycentre des points pondérés  $(H; a+b)$  et  $(C; c)$ .

4°) Autre formulation de la propriété du barycentre partiel (ou d'associativité du barycentre) et généralisation

On peut regrouper certains points du système dont la somme des coefficients est non nulle, remplacer les points choisis par leur barycentre partiel, affecté de cette somme et garder les autres points tels quels sans changer le barycentre.

L'associativité du barycentre marche pour deux points que l'on peut regrouper ou trois points que l'on peut regrouper.

5°) Utilisation du théorème d'associativité du barycentre pour

- construire des barycentres
- démontrer des alignements de points
- démontrer que des droites sont concourantes
- exprimer un point comme barycentre de points pondérés (voir exercices)

### 6°) Exemple de construction d'un barycentre à l'aide du barycentre partiel

G : barycentre des points pondérés  $(A ; 1), (B ; 2), (C ; 2)$   
 $1 + 2 \neq 0$

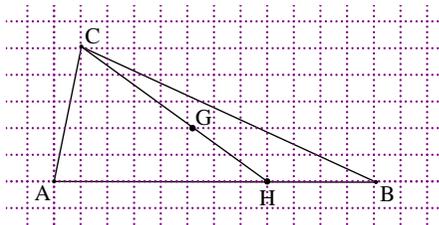
On note H le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 2).

D'après la règle du barycentre partiel (ou d'associativité du barycentre), G est aussi le barycentre des points pondérés (H ; 3) et (C ; 2).

#### Construction :

$$\overline{AH} = \frac{2}{3} \overline{AB} \quad (\text{égalité de position})$$

$$\overline{HG} = \frac{2}{5} \overline{HC}$$



N.B. : D'autres regroupements sont possibles.

### VII. Isobarycentre de trois points

#### 1°) Définition

A, B et C sont trois points quelconques.  
 $a$  est un réel non nul.  
 Le barycentre des points pondérés  $(A ; a), (B ; a), (C ; a)$  est appelé l'isobarycentre des points A, B, C.

Mêmes coefficients

Sans pondération

#### 2°) Théorème

L'isobarycentre G de trois points non alignés A, B, C est le point de concours des médianes du triangle ABC.  
 G est donc le **centre de gravité** du triangle ABC.

#### 3°) Position du centre de gravité

G est situé sur chaque médiane aux deux tiers à partir du sommet.

### 4°) Démonstration

#### Hypothèses

ABC est un triangle.

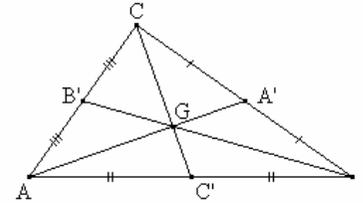
G est l'isobarycentre des points A, B, C c'est-à-dire des points pondérés (A ; 1), (B ; 1), (C ; 1).

A' : milieu de [BC]

B' : milieu de [CA]

C' : milieu de [AB]

#### Figure codée



Démontrons que  $G \in (AA')$  et  $\overline{AG} = \frac{2}{3} \overline{AA'}$

$$G \in (BB') \text{ et } \overline{BG} = \frac{2}{3} \overline{BB'}$$

$$G \in (CC') \text{ et } \overline{CG} = \frac{2}{3} \overline{CC'}$$

A' est le milieu de [BC] donc A' est le barycentre de (B ; 1) et (C ; 1).

D'après le théorème du barycentre partiel, G est le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (A' ; 2).

Donc  $G \in (AA')$  et  $\overline{AG} = \frac{2}{3} \overline{AA'}$ .

B' est le milieu de [CA] donc B' est le barycentre de (A ; 1) et (C ; 1).

D'après le théorème du barycentre partiel, G est le barycentre des points pondérés (B ; 1) et (B' ; 2).

Donc  $G \in (BB')$  et  $\overline{BG} = \frac{2}{3} \overline{BB'}$ .

C' est le milieu de [AB] donc C' est le barycentre de (A ; 1) et (B ; 1).

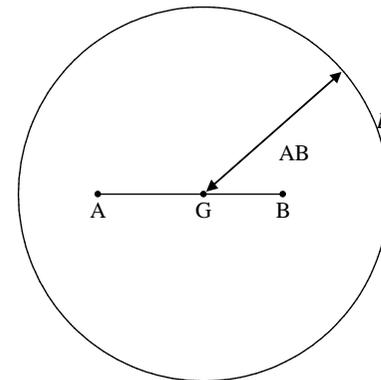
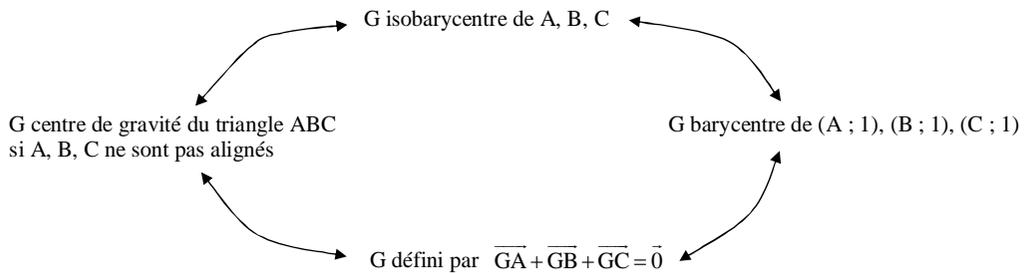
D'après le théorème du barycentre partiel, G est le barycentre des points pondérés (C ; 1) et (C' ; 2).

Donc  $G \in (CC')$  et  $\overline{CG} = \frac{2}{3} \overline{CC'}$ .

Observer la permutation circulaire des lettres :



**Retenir le schéma**



**VIII. Ensembles de points**

**1°) Exemple 1**

A et B sont deux points distincts.

G est le barycentre des points pondérés (A ; 3) et (B ; 4) ( $3+4 \neq 0$ ).

Déterminer l'ensemble E des points M du plan P tels que :  $\|3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = 7\|\overrightarrow{AB}\|$ .

**1<sup>ère</sup> partie : réduction de la somme vectorielle**

D'après la relation fondamentale,

$$\forall M \in P \quad 3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = 7\overrightarrow{MG}$$

**2<sup>e</sup> partie : chaîne d'équivalences**

$$M \in E \text{ si et seulement si } \|3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = 7\|\overrightarrow{AB}\|$$

$$\text{si et seulement si } \|7\overrightarrow{MG}\| = 7\|\overrightarrow{AB}\|$$

$$\text{si et seulement si } |7| \times \|\overrightarrow{MG}\| = 7\|\overrightarrow{AB}\|$$

$$\text{si et seulement si } 7 \times \|\overrightarrow{MG}\| = 7\|\overrightarrow{AB}\|$$

$$\text{si et seulement si } \|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$$

**3<sup>e</sup> partie : conclusion ; identification de l'ensemble**

E est le cercle de centre G et de rayon AB.

**Construction :**

$$\overrightarrow{AG} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB}$$

**N.B. :**

- On ne place pas M sur le cercle.

- Noter l'analogie entre une équation avec des x et la recherche de ce type d'ensemble où l'on cherche des points.

- On ne parle pas de M dans la conclusion.

**2°) Exemple 2**

ABC est un triangle.

G est le barycentre des points pondérés (A ; 3) et (B ; 4) ( $3+4 \neq 0$ ).

Déterminer l'ensemble E des points M du plan P tels que  $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}$  soit colinéaire à  $\overrightarrow{BC}$ .

**1<sup>ère</sup> partie : réduction de la somme vectorielle**

D'après la relation fondamentale,

$$\forall M \in P \quad 3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = 7\overrightarrow{MG}$$

**2<sup>e</sup> partie : chaîne d'équivalences**

$M \in E$  si et seulement si  $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}$  colinéaire à  $\overrightarrow{BC}$  (on cherche M tel que cette condition soit vérifiée)

$$\text{si et seulement si } 7\overrightarrow{MG} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{BC}$$

$$\text{si et seulement si } \overrightarrow{MG} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{BC}$$

**(N.B. :**

- On pourrait aussi écrire  $\overrightarrow{MG} = k\overrightarrow{BC}$  mais cela ne sert pas

- On peut dire  $M = G$  ou  $M \neq G$  et  $(MG) // (BC)$

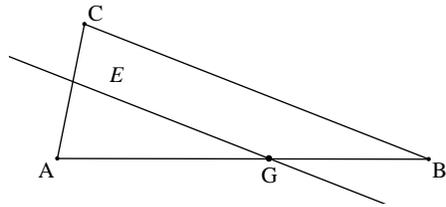
**3<sup>e</sup> partie : conclusion ; identification de l'ensemble**

E est la droite passant par G et qui est parallèle à (BC).

Définition de la médiatrice d'un segment

La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.

Caractérisation des points de la médiatrice d'un segment [AB] (A ≠ B)



3°) Lieux géométriques liés aux vecteurs et aux distances

- lieu des points M tels que  $AM = R$  (A : point fixé,  $R > 0$ ) : cercle de centre A et de rayon R.
- lieu des points M tels que  $MA = MB$  (A et B fixés distincts) : médiatrice de [AB].
- lieu des points M tels que  $\overline{MA}$  et  $\overline{BC}$  sont colinéaires (A, B, C fixés tels que  $B \neq C$ ) : droite passant par A et parallèle à (BC).
- lieu des points M tels que  $\overline{MA}$  et  $\overline{MB}$  sont colinéaires (A et B fixés distincts) : droite (AB).

	Formulation
<b>Version de 6<sup>e</sup></b> Caractérisation des points de la médiatrice d'un segment en 2 énoncés séparés formulés par des « Si ..., alors ... »	Si M appartient à la médiatrice de [AB], alors $MA = MB$ . Réciproquement, si $MA = MB$ , alors M appartient à la médiatrice de [AB].
<b>Version de 2<sup>e</sup></b> Caractérisation des points de la médiatrice d'un segment en un seul énoncé formulé par un « ... si et seulement si ... »	M appartient à la médiatrice de [AB] si et seulement si $MA = MB$ .
<b>Version de 1<sup>ère</sup></b> Formulations en ensemble de points	La médiatrice du segment [AB] est l'ensemble des points M tels que $MA = MB$ . Ou La médiatrice du segment [AB] est le lieu des points M tels que $MA = MB$ .

Reconnaissance d'ensembles de points où il y a **équidistance**.

Définition d'un cercle

<b>Version de 6<sup>e</sup></b>	Soit O un point fixé et R un réel strictement positif fixé. La ligne formée par tous les points du plan qui sont situés à la distance R du point O est appelée <b>cercle</b> de centre O et de rayon R.
<b>Version de 2<sup>e</sup></b>	Soit O un point fixé et R un réel strictement positif fixé. Le cercle de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que $OM = R$ .

Définition d'un disque

<b>Version de 6<sup>e</sup></b>	Soit O un point fixé et R un réel strictement positif fixé. La région du plan limitée par le cercle de centre O et de rayon R est appelée <b>disque fermé</b> de centre O et de rayon R.
<b>Version de 2<sup>e</sup></b>	Soit O un point fixé et R un réel strictement positif fixé. Le disque fermé de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que $OM \leq R$ .

Attention, on dit bien que R est le rayon du disque.

## **Rayon d'un cercle ; rayon d'un disque**

**Le mot rayon pour un cercle** a deux sens :

- il désigne tout segment joignant le centre du cercle à un point du cercle ; dans ce cas, on parle d'un rayon (article indéfini).

On utilise la notation d'un segment avec des crochets.

- il désigne la longueur commune de tous les segments joignant le centre du cercle à un point quelconque du cercle ; dans ce cas, on parle du rayon (article défini).

**Le mot rayon pour un disque** a un seul sens : c'est la longueur des segments joignant le centre du disque à un point du cercle associé au disque.

On parle aussi bien du **rayon** d'un cercle que du rayon d'un disque. Idem avec le mot **diamètre**.

Ensemble où il y a **équidistance** → **médiatrice**.