$1^{\text{ère}}$ S3 — Devoir pour le lundi 23 novembre 2009

I. On considère un triangle ABC quelconque.

On note I et J les points définis par les égalités vectorielles $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Faire une figure en prenant la droite (AB) « horizontale » ; A à gauche de B ; C « au-dessus » de la droite (AB).
Ecrire les hypothèses au début de l'exercice : H_1, H_2 …
Le but de l'exercice est de démontrer par trois méthodes différentes que les points A, I, J sont alignés.
Ces trois méthodes sont indépendantes c'est-à-dire que dans chacune d'elles on ne doit pas utiliser un résultat qui aurait été démontré dans une autre.

1°) **1ère méthode** (en utilisant les vecteurs)
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis conclure.

2°) **2e méthode** (en utilisant les barycentres)
Exprimer le point I comme barycentre des points B et C affectés de coefficients de pondération à déterminer puis le point J comme barycentre des points A, B, C affectés de coefficients de pondération à déterminer ; conclure.

3°) **3e méthode** (en utilisant un repère)
On munit le plan du repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Attention, il s'agit d'un repère « oblique », la droite (AB) étant l'axe des abscisses, (AC) étant l'axe des ordonnées.
Ne pas faire de nouvelle figure.

Donner sans explication les coordonnées des points A, B, C dans ce repère.
Traduire en coordonnées (sous forme de système) les égalités vectorielles définissant les points I et J ; en déduire les coordonnées des points I et J.
Conclure.
Il n'est pas nécessaire de déterminer l'équation réduite de la droite (AC).

II. Dans cet exercice, aucune figure n'est demandée sur la copie.

Partie A

Soit ABC et A'B'C' deux triangles quelconques.
On note G et G' leurs centres de gravité respectifs.
1°) Exprimer $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$ en fonction de $\overrightarrow{GG'}$
2°) En déduire que les triangles ABC et A'B'C' ont le même centre de gravité si et seulement si $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

Partie B Application

Soit EFG un triangle quelconque et λ un réel quelconque dans l'intervalle $[0\,;1]$.

On note M, N, P les points définis par les égalités vectorielles $\overrightarrow{EM} = \lambda\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FN} = \lambda\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{GP} = \lambda\overrightarrow{GE}$.

Démontrer que les triangles EFG et MNP ont le même centre de gravité.

III. On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (m+2)x^2 - 2mx + 1$ où *m* est un réel.

1°) Pour quelles valeurs de *m* la fonction *f* est-elle une fonction polynôme du second degré ?
2°) Lorsque *f* est une fonction polynôme du second degré, calculer son discriminant réduit Δ' en fonction de *m*.
Etudier le signe de Δ' en fonction de *m*.
3°) On considère la phrase *P* : « Pour tout réel *x*, on a $f(x) > 0$ ».
Déterminer les valeurs de *m* pour lesquelles la phase *P* est vraie.

On raisonnera par équivalences en rédigeant ainsi :

P est vraie si et seulement si $\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$.

IV. On considère l'équation $mx^2 + (m+2)x - m + 1 = 0$ (E) où *m* est un réel non nul.

1°) Démontrer que l'équation (E) admet toujours deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

<u>Dans toute la suite, on ne calculera pas leurs expressions.</u>
2°) Exprimer leur somme et leur produit en fonction de *m* (sous forme de quotients).
3°) Déterminer pour quelle valeur de *m* ces deux racines sont inverses l'une de l'autre.
4°) Déterminer pour quelles valeurs de *m* ces deux racines sont de même signe.

V. Calcul littéral

Soit *a*, *b*, *c* trois réels.

1°) Simplifier les expressions suivantes (pour C et D on suppose que *a* et *b* sont non nuls) :
$A = a^3ba^4b^3c^2a$; $B = (ab^2)^2 bc^2a$; $C = ab^{-1}cb^2a^{-2}$; $D = \frac{ab^2ac^2b}{ba^2}$.

2°) Développer et réduire les expressions suivantes :
$E = (a-b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$; $F = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$.

Vérifier les résultats sur ordinateur à l'aide du logiciel *XCas*.

1^ère S3

Correction du devoir pour le 23 novembre 2009

I. 1°) **1^ère méthode** (en utilisant les vecteurs)

$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}$

$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}$

$\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

On remarque que $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires.
Comme ils ont un point commun, on en déduit que les points A, I, J sont alignés.

2°) **2^e méthode** (en utilisant les barycentres)

$\overrightarrow{BI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{1+2}\overrightarrow{BC}$ donc I est le barycentre (B ; 1) et (C ; 2)

On a : $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Cette égalités donne successivement :

$\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JB}\right)$

$-2\overrightarrow{JC}=-\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}$

$-\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$ (1)

$-1+1+2=2\neq 0$

Donc l'égalité (1) permet de dire que J est le barycentre des points pondérés (A ; –1), (B ; 1) et (C ; 2).

D'après la propriété du barycentre partiel, J est le barycentre des points pondérés (A ; –1), (I ; 3).

On en déduit que les points A, I, J sont alignés.

3°) **3^e méthode**

On munit le plan du repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

$A\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$; $B\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$; $C\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$

$\overrightarrow{BI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ signifie que $\begin{cases}x_I-x_B=\frac{2}{3}\left(x_C-x_B\right)\\ y_I-y_B=\frac{2}{3}\left(y_C-y_B\right)\end{cases}$

$$\begin{cases}x_I-1=\frac{2}{3}(0-1)\\ y_I-0=\frac{2}{3}(1-0)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_I=\frac{1}{3}\\ y_I=\frac{2}{3}\end{cases}$$

$\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ signifie que $\begin{cases}x_J-x_C=\frac{1}{2}\left(x_B-x_A\right)\\ y_J-y_C=\frac{1}{2}\left(y_B-y_A\right)\end{cases}$

$$\begin{cases}x_J=\frac{1}{2}\\ y_J=1\end{cases}$$

$\overrightarrow{AI}\begin{vmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{vmatrix}$; $\overrightarrow{AJ}\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{2}{3} & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\times 1-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=0$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires.
Comme ils ont un point commun, on en déduit que les points A, I, J sont alignés.

II. Partie A

1°) $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}\right)+\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}\right)+\left(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'}\right)$

$$=3\overrightarrow{GG'}+\left(\underbrace{\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}}_{\vec{0}}\right)+\left(\underbrace{\overrightarrow{AG'}+\overrightarrow{BG'}+\overrightarrow{CG'}}_{\vec{0}}\right)$$

$$=3\overrightarrow{GG'}$$

2°) ABC et A'B'C' ont le même centre de gravité si et seulement si $G = G'$

si et seulement si $\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$

si et seulement si $3\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$

si et seulement si $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

Partie B

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{FN} + \overrightarrow{GP} &= \lambda\overrightarrow{EF} + \lambda\overrightarrow{FG} + \lambda\overrightarrow{GE}\\ &= \lambda\left(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GE}\right)\\ &= \lambda\vec{0}\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

D'après le résultat de la partie A, on en déduit que les triangles EFG et MNP ont le même centre de gravité.

III. 1°) La fonction *f* est une fonction polynôme du second degré lorsque $m \neq -2$.
2°) Le discriminant réduit du polynôme est égal à : $\Delta' = m^2 - m - 2$.

Considérons le polynôme $m^2 - m - 2$.

Soit δ son discriminant.

$\delta = 1 + 4 \times 2 = 9$

$\delta > 0$
Donc le polynôme $m^2 - m - 2$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $m_1 = -1$ et $m_2 = 2$.
On applique la **règle du signe** d'un polynôme du second degré.

m	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
Signe de Δ'		+	0	–	0	+	

3°) On applique la **règle du signe** d'un polynôme du second degré.

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$
P : « Pour tout réel *x*, on a : $f(x) > 0$ ».
La proposition *P* est équivalente au système $\begin{cases}\Delta < 0\\ a > 0\end{cases}$.

(On vérifie l'équivalence dans les deux sens c'est-à-dire que si *P* est vraie alors le système $\begin{cases}\Delta < 0\\ a > 0\end{cases}$ est vérifié et réciproquement, que si le système est vérifié, alors *P* est vraie).

Un polynôme du second degré a un signe constant si et seulement si son discriminant est strictement négatif.

P est vraie si et seulement si $\begin{cases}\Delta < 0\\ m + 2 > 0\end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases}-1 < m < 2\\ m > -2\end{cases}$

si et seulement si $-1 < m < 2$.

IV. $mx^2 + (m+2)x - m + 1 = 0$ (E) (m : réel non nul)

1°) Considérons le polynôme $mx^2 + (m+2)x - m + 1$.

Son discriminant est égal à $\Delta = (m+2)^2 - 4m(-m+1)$

$\Delta = (m^2 + 4m + 4) + 4m^2 - 4m$

$\Delta = 5m^2 + 4$

On en déduit que $\forall m \in \mathbb{R} \quad \Delta > 0$

Par suite, l'équation (E) admet toujours deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

2°) La somme des racines est égale à $S = -\dfrac{m+2}{m}$ et leur produit est égale à $P = \dfrac{1-m}{m}$.
3°)

Rappel de définitions (inverse d'un réel non nul ; nombres inverses l'un de l'autre)
Définition 1 : L'inverse d'un réel $x \neq 0$ est le réel $\dfrac{1}{x}$.
Définition 2 : On dit que deux réels *x* et *y* sont inverses l'un de l'autre pour exprimer que l'on a : $xy = 1$.

Les deux racines sont inverses l'une de l'autre si et seulement si $\dfrac{1-m}{m} = 1$

si et seulement si $1 - m = m$

si et seulement si $m = \dfrac{1}{2}$

4°) Les deux racines sont de même signe si et seulement si leurs produit est strictement positif

si et seulement si $\dfrac{1-m}{m} > 0$

On résout l'inéquation $\dfrac{1-m}{m} > 0$ en utilisant un tableau de signes

On trouve $m \in \left]0\,;1\right[$.