Chapitre 17 Lignes trigonométriques d'un nombre réel

Dans tout le chapitre, le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$.

Dans les paragraphes I à IV, on notera avec des lettres majuscules X et Y les cordonnées dans le plan (pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté avec x qui sera utilisé pour les mesures d'angles en radians).
Ainsi les coordonnées d'un point M dans le plan seront notées X_{M} (pour l'abscisse) et Y_{M} (pour l'ordonnée).

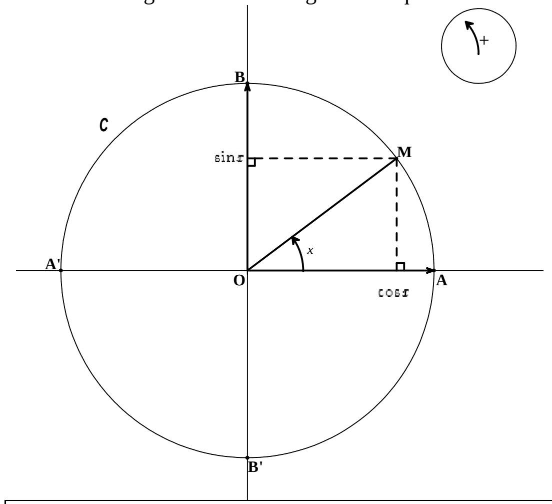
Dan le paragraphe V, on reviendra aux notations normales avec des lettres minuscules car il n'y aura plus d'ambiguïté.

I. <u>Cosinus et sinus d'un réel</u>

1°) Définition

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$.

x est un réel quelconque.
M est son image sur le cercle trigonométrique.



• Le **cosinus de x** est l'abscisse de M dans le repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$.

• Le **sinus de x** est l'ordonnée de M dans le repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$.

Donc $\mathrm{M}\left(\cos x\,;\sin x\right)$.

2°) Exemples

• L'image de $\dfrac{\pi}{2}$ est $\mathrm{B}(0\,;1)$.

Donc $\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{2}=0\\ \sin\dfrac{\pi}{2}=1\end{cases}$.

• L'image de π est $\mathrm{A'}(-1\,;0)$.

Donc $\begin{cases}\cos\pi=-1\\ \sin\pi=0\end{cases}$.

• L'image de $\dfrac{3\pi}{2}$ est $\mathrm{B'}(0\,;-1)$.

Donc $\begin{cases}\cos\dfrac{3\pi}{2}=0\\ \sin\dfrac{3\pi}{2}=-1\end{cases}$.

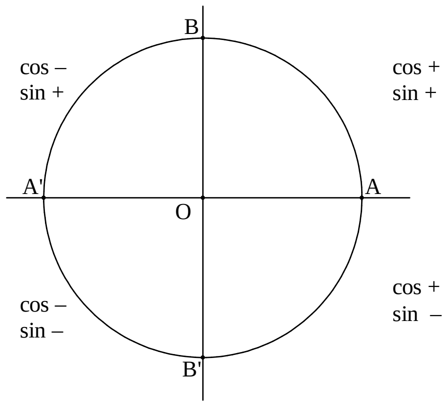
• L'image de 0 est $\mathrm{A}(1\,;0)$.

Donc $\begin{cases}\cos 0=1\\ \sin 0=0\end{cases}$.

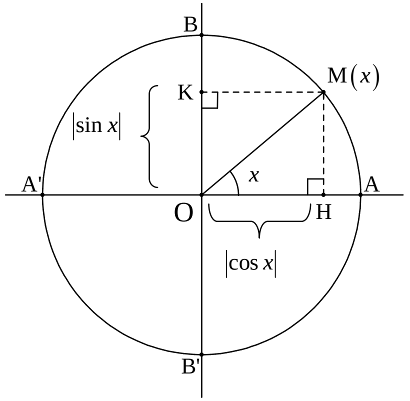
3°) Encadrement et signe

$$-1\leq\cos x\leq 1$$

$$-1\leq\sin x\leq 1$$



4°) Relation fondamentale



$OH = |\cos x|$

$OK = |\sin x|$

(Attention aux barres de valeur absolue indispensables ici).

H : projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.
K : projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.
OHM est un triangle rectangle en H.
Donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$OH^2 + HM^2 = 1$

$\boxed{\mathbf{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}}$

N.B. Conventions d'écriture :

$\cos^2 x = (\cos x)^2$

$\sin^2 x = (\sin x)^2$

Cette égalité est souvent utilisée sous la forme :

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

5°) Périodicité

x est un réel quelconque.
k un entier relatif quelconque.
x et $x + 2k\pi$ ont le même point associé sur le cercle trigonométrique.

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(x+2k\pi) = \cos x \\ \sin(x+2k\pi) = \sin x \end{array}}$$

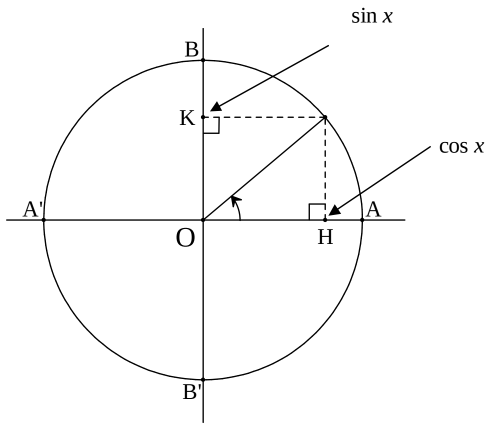
Exemple

$\cos\left(\dfrac{\pi}{9} + 2006\pi\right) = \cos\dfrac{\pi}{9}$

6°) Lien avec le triangle rectangle

x est un réel quelconque compris dans l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

M est son image sur le cercle trigonométrique.



$M \in \overset{\frown}{AB}$

$\widehat{AOM} = x$ rad

Dans le triangle OHM rectangle en H :

$\cos x = \dfrac{ADJ}{HYP} = \dfrac{OH}{OM} = \dfrac{OH}{1} = OH = x_M$

définition 4^e

$\sin x = \dfrac{OPP}{HYP} = \dfrac{HM}{OM} = \dfrac{HM}{1} = HM = y_M$

définition 3^e

II. Tangente d'un réel

1°) Définition

> x est un réel quelconque tel que $\cos x \neq 0$.
> La **tangente** de x est définie par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

$\tan\dfrac{\pi}{2}$ et $\tan\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ n'existent pas.

(**Hors programme :**

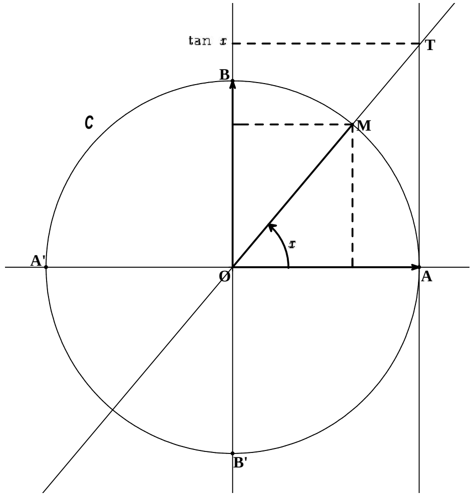
$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

cotangente de x = inverse de la tangente)

2°) Lien avec le coefficient directeur d'une droite

x est un réel quelconque compris dans l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

M est son image sur le cercle trigonométrique.



$M\left(\cos x\,;\sin x\right)$

Le coefficient directeur de la droite (OM) est égal à :

$m=\dfrac{y_M-y_O}{x_M-x_O}$

$m=\dfrac{\sin x-0}{\cos x-0}$

$\boxed{m=\tan x}$

2°) Lecture graphique de la tangente

La droite (OM) coupe la droite Δ d'équation réduite $x=1$ (tangente en A au cercle trigonométrique) en un point T.

L'équation réduite de la droite (OM) s'écrit $Y=mX$ soit $Y=\left(\tan x\right)X$.

Donc $Y_T=\left(\tan x\right)X_T$

$Y_T=\left(\tan x\right)\times 1$

$Y_T=\tan x$

3°) Relation liant la tangente et le cosinus

x est un réel quelconque tel que $\cos x\neq 0$.

On a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

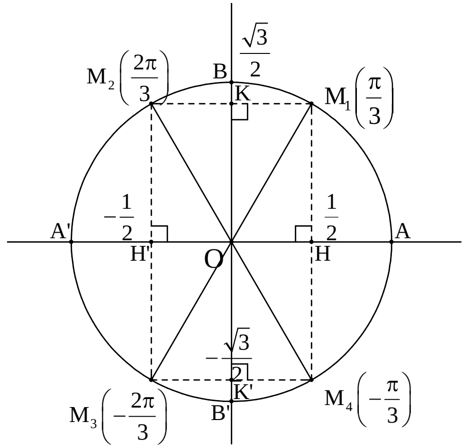
D'où : $\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

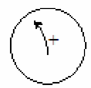
$1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\boxed{1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}}$

III. Valeurs remarquables

1°) Angle de $\frac{\pi}{3}$ et valeurs associées





• Angle de $\frac{\pi}{3}$

$[HM_1]$ est une hauteur du triangle équilatéral OAM_1.
Donc H est le milieu de [OA].

$OH=\dfrac{OA}{2}=\dfrac{1}{2}$

$[OK]$ est une hauteur du triangle équilatéral OM_1M_2.

$OK=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$M_1\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Or M_1 est l'image de $\frac{\pi}{3}$.

Donc $\begin{cases} \cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} \\ \sin \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}}$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

• **Angle de $\dfrac{2\pi}{3}$**

$M_2\left(-\dfrac{1}{2} ; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

D'où $\begin{cases} \cos \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

• **Angle de $-\dfrac{\pi}{3}$**

$M_4\left(\dfrac{1}{2} ; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

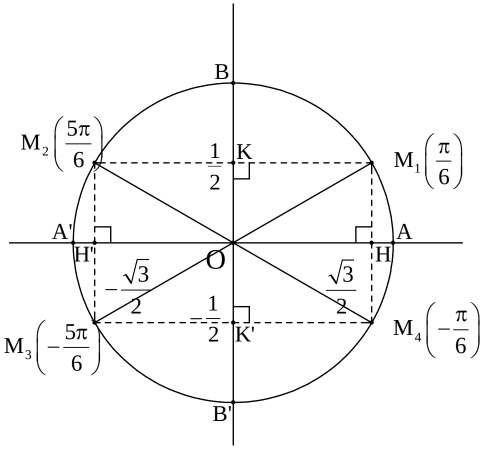
D'où $\begin{cases} \cos \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \\ \sin \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

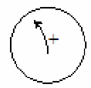
• **Angle de $-\dfrac{2\pi}{3}$**

$M_3\left(-\dfrac{1}{2} ; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

D'où $\begin{cases} \cos \left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} \\ \sin \left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

2°) Angle de $\dfrac{\pi}{6}$ et valeurs associées





• **Angle de $\dfrac{\pi}{6}$**

$M_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$

Donc $\begin{cases} \cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}}$$

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}$$

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

• **Angle de $\dfrac{5\pi}{6}$**

$M_2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$

D'où $\begin{cases} \cos \dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

• **Angle de $-\dfrac{\pi}{6}$**

$M_4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;-\dfrac{1}{2}\right)$

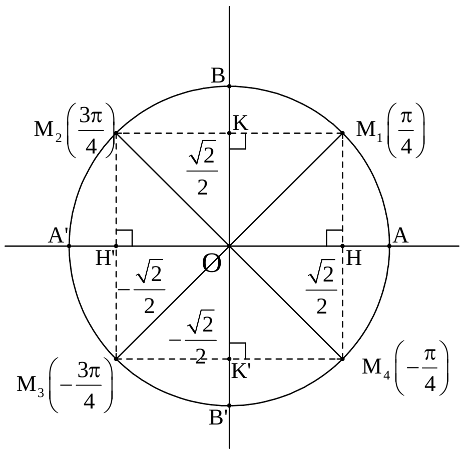
D'où $\begin{cases} \cos \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

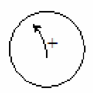
• **Angle de $-\dfrac{5\pi}{6}$**

$M_3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;-\dfrac{1}{2}\right)$

D'où $\begin{cases} \cos \left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

3°) Angle de $\dfrac{\pi}{4}$ et valeurs associées





• **Angle de $\dfrac{\pi}{4}$**

La quadrilatère OKM_1H est un carré.

La diagonale $[OH_1]$ a pour longueur 1 donc son côté mesure $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$M_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Donc $\begin{cases} \cos \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}}$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}}$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1$$

• **Angle de $\dfrac{3\pi}{4}$**

$M_2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

D'où $\begin{cases} \cos \dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

• **Angle de $-\dfrac{\pi}{4}$**

$M_4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

D'où $\begin{cases} \cos \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

• **Angle de** $-\dfrac{3\pi}{4}$

$M_3\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

D'où $\begin{cases}\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

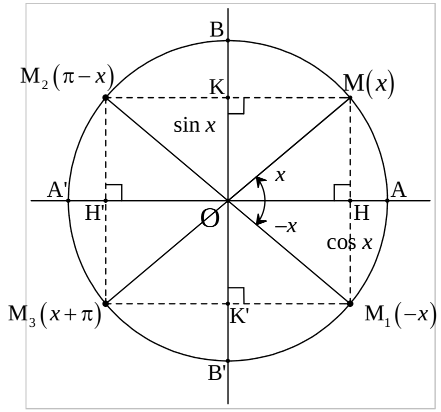
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

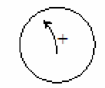
Moyen mnémotechnique pour retenir la moitié du tableau avec 0, 1, 2, 3, 4.

IV. Angles associés

1°) Angles opposés

x est un réel quelconque.
M est son image sur le cercle trigonométrique.





$M(\cos x;\sin x)$

Or M_1 est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Donc $M_1(\cos x;-\sin x)$.

Or $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right)=x$

Donc $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM_1}\right)=-x$.

On en déduit que M_1 est l'image de $-x$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos(-x)=\cos x\\ \sin(-x)=-\sin x\end{array}}$$

2°) Angles supplémentaires (c'est-à-dire dont la somme est égale à π)

$M_2=S_{(OB)}(M)$ **(attention aux notations des transformations)**

Donc $M_2(-\cos x;\sin x)$.

Or $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right)=x$

Donc $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM_2}\right)=\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM_1}\right)+\left(\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_2}\right)=\pi-x$.

On en déduit que M_2 est l'image de $\pi-x$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos(\pi-x)=-\cos x\\ \sin(\pi-x)=\sin x\end{array}}$$

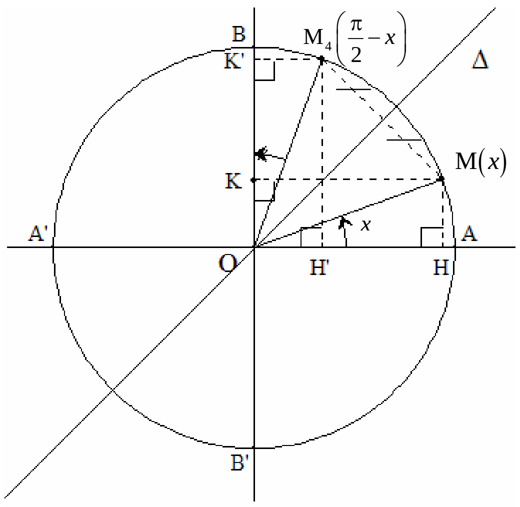
3°) Angles dont la différence est égale à π

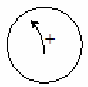
$M_3 = S_O(M)$ (⚠ aux notations des transformations)
Donc $M_3(-\cos x\,;-\sin x)$.

Or $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM_3}\right)=\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM_1}\right)+\left(\overrightarrow{OM_1}\,;\overrightarrow{OM_3}\right)=x+\pi$.
On en déduit que M_2 est l'image de $x+\pi$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos(\pi+x)=-\cos x\\ \sin(\pi+x)=-\sin x\end{array}}$$

4°) Angles complémentaires (c'est-à-dire dont la somme est égale à $\frac{\pi}{2}$)





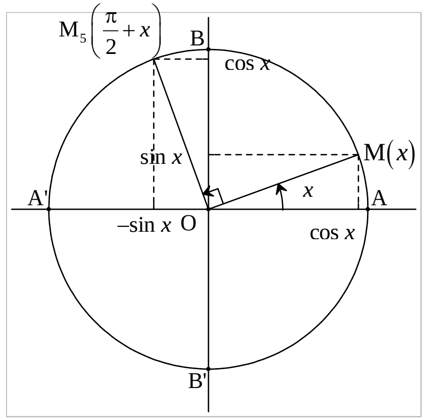
Δ est la bissectrice de $\widehat{AOB}$.

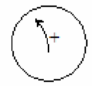
$M_4 = S_\Delta(M)$
Donc $M_4(\sin x\,;\cos x)$.

Or M_4 est l'image de $\frac{\pi}{2}-x$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\end{array}}$$

5°) Angles dont la différence est égale à $\frac{\pi}{2}$





$M_5 = R_{\left(O\,;\frac{\pi}{2}\right)}(M)$

$M_5(-\sin x\,;\cos x)$.
Or $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM_5}\right)=\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)+\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OM_3}\right)=x+\frac{\pi}{2}$

M_5 est l'image de $\frac{\pi}{2}-x$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x\end{array}}$$

6°) Récapitulatif

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(-x)&=\cos x\\ \sin(-x)&=-\sin x\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\pi-x)&=-\cos x\\ \sin(\pi-x)&=\sin x\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\pi+x)&=-\cos x\\ \sin(\pi+x)&=-\sin x\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=\cos x\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)&=-\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)&=\cos x\end{aligned}}$$

$$\boxed{\mathbf{\cos^2 x+\sin^2 x=1}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(x+2k\pi)&=\cos x\\ \sin(x+2k\pi)&=\sin x\end{aligned}\qquad k\in\mathbb{Z}}$$

Exemples d'utilisation

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)&=-\cos\frac{\pi}{3}\\ &=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)&=-\sin\frac{\pi}{4}\\ &=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(3\pi+x)&=\cos(2\pi+\pi+x)\\ &=\cos(\pi+x)\\ &=-\cos x\end{aligned}$$

entier impair $\times\ \pi \to$ donne un – (valable pour le sinus et le cosinus)

$$\begin{aligned}\sin(-x-\pi)&=\sin\Big[-\underbrace{(x+\pi)}_{X}\Big]\\ &=-\sin(x+\pi)\\ &=-(-\sin x)\\ &=\sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)&=\sin\left(\frac{4\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-x\right)\\ &=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{2}-x\right)\\ &=\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)\\ &=\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]\\ &=\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]\\ &=\cos x\end{aligned}$$

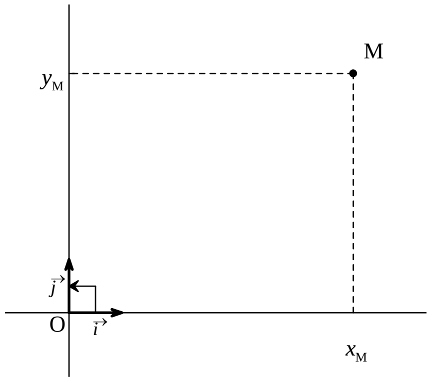
Attention aux écritures

$$\begin{aligned}\sin^2(-x)&=\left[\sin(-x)\right]^2\\ &=(-\sin x)^2\\ &=\sin^2 x\end{aligned}$$

V. Repérage polaire

1°) Principe

Le plan et muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



Coordonnées cartésiennes

M | x_M / y_M ← coordonnées cartésiennes de M dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

On peut repérer un point M par ses coordonnées cartésiennes $(x_M\ ;\ y_M)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (géométrie analytique).

Lorsque $M \neq O$, on peut aussi repérer M grâce aux distances et aux angles orientés.

Lorsque $M \neq O$, on peut repérer M par la distance *r* de M à l'origine O et par une mesure θ de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)$.

2°) Définition

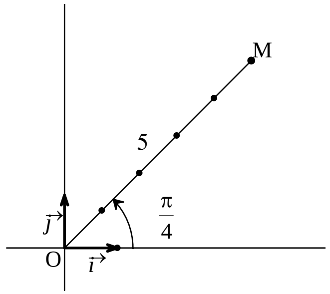
M est un point quelconque du plan distinct de O.
On pose $r = OM$ et $\theta = \left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)$.
On dit que le couple (*r* ; θ) est un **système de coordonnées polaires** de M.

Attention :
Ce couple n'est pas unique.
(*r* ; θ+2*k*π) avec $k \in \mathbb{Z}$, est aussi un système de coordonnées polaires de M.

3°) Exercice

Construire le point M de coordonnées polaires $\left(5\ ;\ \frac{\pi}{4}\right)$.

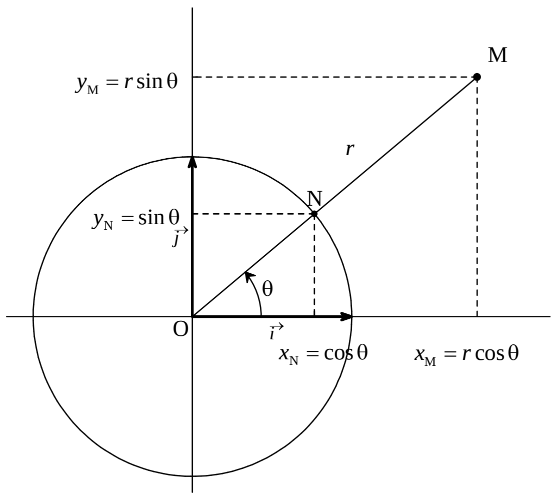
$$\begin{cases} OM = 5 \\ \left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$



Bissectrice au compas ou avec les carreaux.

4°) Démonstration

M est un point quelconque du plan tel que $M \neq O$.
(*r* ; θ) est une système de coordonnées polaires de M.



On considère le point d'intersection N de la demi-droite [OM) et du cercle trigonométrique.

$\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right)=\theta$

Donc $\begin{cases} x_{\mathrm{N}}=\cos\theta \\ y_{\mathrm{N}}=\sin\theta \end{cases}$

Or $\mathrm{N}\in[\mathrm{OM})$ et $\mathrm{OM}=r$.

Donc $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=r\overrightarrow{\mathrm{ON}}$.

D'où $\begin{cases} x_{\mathrm{M}}-x_{\mathrm{O}}=r\left(x_{\mathrm{M}}-x_{\mathrm{O}}\right) \\ y_{\mathrm{M}}-y_{\mathrm{O}}=r\left(y_{\mathrm{M}}-y_{\mathrm{O}}\right) \end{cases}$

$\begin{cases} x_{\mathrm{M}}=r\cos\theta \\ y_{\mathrm{M}}=r\sin\theta \end{cases}$

5°) Règle

M est un point quelconque distinct de O.
(r ; θ) est un système de coordonnées polaires de M.
On a : $\begin{cases} x_{\mathrm{M}}=r\cos\theta \\ y_{\mathrm{M}}=r\sin\theta \end{cases}$

6°) Rappel

Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$

$\mathrm{AB}=\sqrt{\left(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}\right)^2+\left(y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}\right)^2}$

$\mathrm{OM}=\sqrt{{x_{\mathrm{M}}}^2+{y_{\mathrm{M}}}^2}$

7°) Exercices

• M_1 est le point de coordonnées polaires $\left(4\,;\frac{\pi}{3}\right)$.

Calculer ses coordonnées cartésiennes.

$\begin{cases} x_{\mathrm{M}}=4\times\cos\frac{\pi}{3} \\ y_{\mathrm{M}}=4\times\sin\frac{\pi}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} x_{\mathrm{M}}=2 \\ y_{\mathrm{M}}=2\sqrt{3} \end{cases}$

• M_2 est le point de coordonnées cartésiennes $(5\,;-5)$.
Déterminer un système de coordonnées polaires de M_2.

On pose $r=\mathrm{OM}_2$ et on note θ une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}_2}\right)$.

$$\begin{aligned} r&=\mathrm{OM}_2 \\ &=\sqrt{\left(x_{\mathrm{M}_2}\right)^2+\left(y_{\mathrm{M}_2}\right)^2} \\ &=\sqrt{5^2+(-5)^2} \\ &=5\sqrt{2} \end{aligned}$$

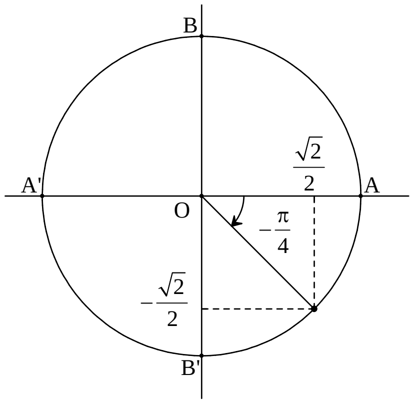
On a : $\begin{cases} x_{\mathrm{M}_2}=r\times\cos\theta \\ y_{\mathrm{M}_2}=r\times\sin\theta \end{cases}$

$\begin{cases} 5=5\sqrt{2}\,\cos\theta \\ -5=5\sqrt{2}\,\sin\theta \end{cases}$

$\begin{cases} \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$\begin{cases} \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\theta=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$



M_2 a pour coordonnées polaires $\left(5\sqrt{2}\,;-\frac{\pi}{4}\right)$.

VI. Compléments sur les angles orientés

1°) Une nouvelle notation

Rappel :

Si θ est une mesure en radians d'un angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$, alors les mesures en radians de cet angle orienté sont tous les nombres de la forme $\theta+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

On écrira : $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\theta+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\theta$ (modulo 2π)

(mod. 2π)

$\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\theta$ (2π)

$\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\theta$ $[2\pi]$

2°) Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si	$\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=0\ [2\pi]$ ou $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\pi\ [2\pi]$

3°) Point-méthode : application au parallélisme et à l'alignement

A, B, C, D sont quatre points tels que $A\neq B$ et $C\neq D$.

(AB) // (CD) si et seulement si	$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right)=0\ [2\pi]$ ou $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right)=\pi\ [2\pi]$

A, B et C sont trois points tels que $A\neq B$ et $A\neq C$.

A, B et C sont alignés si et seulement si	$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=0\ [2\pi]$ ou $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\pi\ [2\pi]$

4°) Attention : notation réservée aux angles orientés cette année

Exemple :

$$\frac{2001\pi}{4}=\frac{\pi+2000\pi}{4}$$

$$=\frac{\pi}{4}+250\times2\pi$$

$$\cancel{\frac{2001\pi}{4}=\frac{\pi}{4}}\ [2\pi]$$