TS3

Contrôle du mardi 17 novembre 2009 (4 heures)

Prénom : ………………………………… Nom : ……………………………………………………

• Sur la première copie, doivent figurer le nom, le prénom, la classe, la date, l'intitulé exact sans abréviations ainsi qu'un <u>cartouche</u> de présentation avec le numéro des exercices.
• Les exercices doivent être traités dans l'ordre, sans renvoi sur d'autres feuilles, avec les numéros des exercices et des questions correctement indiqués.
• La rédaction doit être concise et claire, sans ratures ni abréviations. Les calculs doivent être bien présentés (en particulier, traits de fractions à la règle). Les réponses et des résultats doivent être bien mis en évidence (en les encadrant en rouge).

I. (4 points) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3+x^2-4}{x^2-4}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Pour cet exercice, on pourra s'inspirer de l'aide à la rédaction et aux calculs fournie à la fin de l'énoncé.

1°) Déterminer quatre constantes a, b, c, d telles que pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\ ;\ 2\}$, on ait :

$f(x) = ax + b + \dfrac{cx+d}{x^2-4}$.

2°) En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ dont on précisera une équation.
3°) Déterminer l'abscisse du point d'intersection A de $\mathcal{C}$ et Δ.

II. (1 point) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)^2\left(x^2+8\right)}{x^2}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une parabole asymptote Γ dont on précisera une équation.
Déterminer les coordonnées du sommet S de Γ.

III. (5 points) On considère la fonction $f : x \mapsto x+1+\dfrac{4}{\mathrm{e}^x+1}$.

1°) Démontrer que, pour tout réel x, on a : $f'(x) = \left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right)^2$.

2°) Dresser le tableau de variation de f avec les limites (on ne détaillera pas le calcul des limites).
3°) Calculer $f''(x)$. Donner le résultat sous forme factorisée.

4°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Déterminer l'(les) abscisse(s) du (des) point(s) de $\mathcal{C}$ en lequel (lesquels) la tangente a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{4}$.

5°) a) Démontrer en rédigeant soigneusement que l'équation $f(x) = 0$ (E) admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-4}.
b) *Dans cette question, toute trace de recherche même non fructueuse sera prise en compte.*

Démontrer que l'on a : $f'(\alpha) = \left(\dfrac{\alpha+3}{2}\right)^2$.

6°) Démontrer que pour tout réel x, on a : $0 \leqslant f'(x) < 1$.

IV. (4 points) Les deux parties sont indépendantes.

Pour chaque tableau, cocher les réponses sans justifier. Aucun point n'est retiré en cas de réponse incorrecte.

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2}{3-u_n}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n-2}{u_n-1}$ (on admettra que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \neq 1$).

1	La suite (u_n) est géométrique.	☐	V	☐	F
2	La suite (v_n) est géométrique.	☐	V	☐	F
3	Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 1 + \dfrac{1}{1+2^n}$.	☐	V	☐	F
4	Pour tout entier naturel n, on a : $1 < u_n \leqslant \dfrac{3}{2}$.	☐	V	☐	F

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{1-u_n}$ (on admettra que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \neq 1$).

1	La suite (u_n) est arithmétique.	☐	V	☐	F
2	La suite (v_n) est arithmétique.	☐	V	☐	F
3	Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.	☐	V	☐	F
4	Pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n < 1$.	☐	V	☐	F

V. (3 points) QCM

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \mathrm{e}^{-u_n} + 1$.

Pour chacune des questions, quatre propositions sont faites dont une seule est exacte. Pour chaque question, donner sans justification une réponse.
Une bonne réponse rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,5 point.

1°) Soit a est un réel strictement positif. Si $u_0 = \ln a$, alors :

a. $v_0 = \frac{1}{a} + 1$ b. $v_0 = \frac{1}{1+a}$ c. $v_0 = -a + 1$ d. $v_0 = \mathrm{e}^{-a} + 1$

2°) Si (u_n) est strictement croissante, alors :

a. (v_n) est strictement décroissante et majorée par 2

b. (v_n) est strictement croissante et minorée par 1

c. (v_n) est strictement croissante et majorée par 2

d. (v_n) est strictement décroissante et minorée par 1

3°) Si (u_n) est majorée par 2, alors :

a. (v_n) est majorée par $1 + \mathrm{e}^{-2}$

b. (v_n) est minorée par $1 + \mathrm{e}^{-2}$

c. (v_n) est majorée par $1 + \mathrm{e}^{2}$

d. (v_n) est minorée par $1 + \mathrm{e}^{2}$

Question	**1°**	**2°**	**3°**	**Total**
Réponse				

VI. (3 points) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1°) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2°) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n. On rédigera ainsi :
« On peut conjecturer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n =$............. ».

3°) Le but de cette question est de valider la conjecture émise dans la question précédente.

a) Démontrer que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n^2$ est arithmétique.

b) Utiliser ce résultat pour exprimer u_n en fonction de n.

c) Donner la valeur de u_{2009}.

Bonus au choix

1^er^ choix : On considère la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^x + x(\ln x - 1 - \mathrm{e})$.
Déterminer le (les) extremum(s) de f sur son ensemble de définition. Détailler la démarche.

2^e^ choix : Déterminer les extremums locaux de la fonction f définie dans l'exercice **II**. Détailler la démarche.

Annexe

Aide à la rédaction pour les asymptotes ou courbes asymptotes (phrase-type)

« La courbe (E) admet la droite D d'équation $y = \ldots$ pour asymptote horizontale en $+\infty$ (ou en $-\infty$). »
« La courbe $\mathcal{C}$ admet la courbe Γ d'équation $y = \ldots$ pour courbe asymptote en $+\infty$ (ou en $-\infty$). »

Aide à la présentation des calculs pour la méthode des coefficients indéterminés

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 1}{x+3}$.

Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, on ait $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}$.

Solution rédigée :

On pose $g(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
$$g(x) = \frac{(ax+b)(x+3)+c}{x+3} = \frac{ax^2 + 3ax + bx + 3b + c}{x+3} = \frac{ax^2 + (3a+b)x + 3b + c}{x+3}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x+3}$.

On identifie les coefficients des numérateurs.

On obtient le système : $\begin{cases} a = 1 \\ 3a + b = 2 \\ 3b + c = -1 \end{cases}$.

On trouve : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\} \quad f(x) = x - 1 + \frac{2}{x+3}}$$

Corrigé du contrôle du 17-11-2009

I.

$f : x \mapsto \dfrac{x^3+x^2-4}{x^2-4}$

1°)

En suivant la méthode donnée en annexe de l'énoncé, on trouve assez rapidement : $a=1$, $b=1$, $c=4$, $d=0$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\ ;\ 2\}$, on a : $f(x)=x+1+\dfrac{4x}{x^2-4}$.

Remarque :

On aurait aussi pu faire une division euclidienne de polynôme (hors-programme) pour trouver le même résultat.

2°)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0$ (on utilise la limite d'une fonction rationnelle en + ∞ et – ∞)

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x}=0$

Donc la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y=x+1$ pour asymptote oblique en + ∞ et en – ∞.

3°) Déterminons l'abscisse du point d'intersection A de $\mathcal{C}$ et Δ.

On résout l'équation $f(x)=x+1 \quad (1)$.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow x+1+\frac{4x}{x^2-4}=x+1\\ &\Leftrightarrow \frac{x}{x^2-4}=0\\ &\Leftrightarrow x=0\end{aligned}$$

Le point d'intersection A de $\mathcal{C}$ et Δ a pour abscisse 0.

II. $f : x \mapsto \dfrac{x^3+x^2-4}{x^2-4}\ \dfrac{(x+1)^2(x^2+8)}{x^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*\quad f(x)=\dfrac{x^4+2x^3+9x^2+16x+8}{x^2}=x^2+2x+9+\dfrac{16}{x}+\dfrac{8}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x^2+2x+9)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{16}{x}+\dfrac{8}{x^2}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x^2+2x+9)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{16}{x}+\dfrac{8}{x^2}\right)=0$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la parabole Γ d'équation $y=x^2+2x+9$ pour parabole asymptote + ∞ et en – ∞.

Le sommet S de Γ a pour coordonnées (– 1 ; 8).

Rappel :

La parabole d'équation $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ est une **parabole** de **sommet** $S\left\lvert\begin{array}{l}-\dfrac{b}{2a}\\ f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\end{array}\right.$.

Une question non demandée dans le contrôle aurait été de déterminer la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Γ.

III.

1°) $\forall x \in \mathbb{R}\quad f'(x)=1-\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{(e^x+1)^2-4e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^{2x}+2e^x+1-4e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^{2x}-2e^x+1}{(e^x+1)^2}=\dfrac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

2°) La dérivée de *f* est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ et s'annule en 0.

Donc *f* est strictement croissante sur ℝ.

Rappel du théorème sur le sens de variation (chapitre sur la dérivation des fonctions) :

On considère une fonction *u* dérivable sur un intervalle *I*. Si la dérivée de *u* est positive ou nulle sauf en des réels isolés de *I* où elle s'annule, alors *u* est strictement croissante sur *I*.

x	– ∞		0		+ ∞
Signe de $f'(x)$		+	0	+	
Variations de *f*	– ∞	↗	3	↗	+ ∞

3°) Pour calculer la dérivée seconde de *f*, on observe que la dérivée première de *f* est de la forme u^2.

On pose $u(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\quad u'(x)=\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

On applique la formule :

$\forall x \in \mathbb{R}\quad f''(x)=2\times\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}\times\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{4e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$

4°) Pour déterminer l'(les) abscisse(s) du (des) point(s) de $\mathcal{C}$ en lequel (lesquels) la tangente a pour coefficient directeur $\frac{1}{4}$, on doit résoudre l'équation $f'(x)=\frac{1}{4}$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{1}{2} \text{ ou } \frac{e^x-1}{e^x+1}=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(e^x-1\right)=e^x+1 \text{ ou } 2\left(e^x-1\right)=-\left(e^x+1\right)$$

$$\Leftrightarrow e^x=3 \text{ ou } 3e^x=1$$

$$\Leftrightarrow x=\ln 3 \text{ ou } x=-\ln 3$$

Conclusion : $\mathcal{C}$ admet une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{4}$ aux points d'abscisse ln 3 et – ln 3.

5°) a) *f* est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique.

$f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

L'équation (E) admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

La calculatrice permet d'écrire : $\alpha=-97248...$

Donc on peut écrire : $-4,9725<\alpha<-4,9724$.

b) **Question assez difficile et technique :**

On part du fait que α est solution de l'équation (E) donc $\alpha+1+\frac{4}{e^\alpha+1}=0$ d'où $-\frac{2}{e^\alpha+1}=\frac{\alpha+1}{2}$.

On observe ensuite que $\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2=\left(\frac{e^x+1-2}{e^x+1}\right)^2=\left(1-\frac{2}{e^x+1}\right)^2$.

Donc on peut écrire que $f'(\alpha)=\left(1-\frac{2}{e^\alpha+1}\right)^2=\left(1+\frac{\alpha+1}{2}\right)^2=\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)^2$.

6°) Démontrons que pour tout réel *x*, on a : $0\leqslant f'(x)<1$.

De manière évidente, on a : $f'(x)\geqslant 0$.

On va démontrer que $\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)<1$.

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)-1=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2-1=\left[\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)-1\right]\left[\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)+1\right]=\left(-\frac{2}{e^x+1}\right)\times\frac{2e^x}{e^x+1}=-\frac{4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}.$$

On voit clairement que $\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)-1<0$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)<1$.

On a donc $\forall x\in\mathbb{R} \quad 0\leqslant f'(x)<1$.

Question supplémentaire (bonus que je n'ai pas mis)

Démontrer que $\mathcal{C}$ admet le point $\Omega(0\,;3)$ pour centre de symétrie. Ou Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet un centre de symétrie.

Complément : On a trouvé $f'(x)<1$ et $f'(\alpha)=\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)^2$.

On obtient alors : $\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)^2<1$ d'où : $-1<\frac{\alpha+3}{2}<1$ soit $-5<\alpha<-1$.

Ainsi, sans calculatrice, on obtient un encadrement de α.

IV.

Partie A

F – V – V – V

1. Faux

On a : $u_0=\frac{3}{2}$; $u_1=\frac{4}{3}$; $u_2=6$.

On a : $\frac{u_1}{u_0}\neq\frac{u_2}{u_1}$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2. Vrai

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-1}=\frac{\frac{-2}{u_n-3}-2}{\frac{-2}{u_n-3}-1}=\frac{-2-2u_n+6}{-2-u_n+3}=\frac{2u_n-4}{u_n-1}=2v_n$$

La relation obtenue permet d'affirmer que la suite (v_n) est géométrique.

Pour la question suivante, on calcule son premier terme $v_0=\frac{u_0-2}{u_0-1}=-1$.

3. Vrai

D'après le résultat de la question précédente, $\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n=-2^n$.

Or $v_n=\frac{u_n-2}{u_n-1}$ par définition.

Par produit en croix, on obtient $v_nu_n-v_n=u_n-2$ ce qui donne $u_n\left(v_n-1\right)=v_n-2$ soit $u_n=\frac{v_n-2}{v_n-1}$.

On a donc $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=\frac{2^n+2}{2^n+1}$.

Il faut transformer pour obtenir le résultat demandé : $u_n = \dfrac{2^n+1+1}{2^n+1} = \dfrac{2^n+1}{2^n+1} + \dfrac{1}{2^n+1} = 1 + \dfrac{1}{2^n+1}$.

4. Vrai

Partie B

F – V – V – V

1. Faux

$u_0 = 0$; $u_1 = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{2}{3}$

On a : $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

2. Vrai

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \dfrac{1}{1-u_{n+1}} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2-u_n}} = \dfrac{2-u_n}{1-u_n} = \dfrac{1-u_n+1}{1-u_n} = 1 + \dfrac{1}{1-u_n} = 1 + v_n$; $v_0 = \dfrac{1}{1-u_0} = 1$.

La suite (v_n) est arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0 = 1$.

3. Vrai

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 + n \times 1 = 1 + n$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \dfrac{1}{1-u_n}$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{1}{v_n} = 1 - u_n$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 1 - \dfrac{1}{v_n} = 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$.

4. Vrai

V. QCM

Question	**1°**	**2°**	**3°**
Réponse	**a**	**d**	**b**

Justification des résultats

1°) On sait que $u_0 = \ln a$ donc $v_0 = e^{-\ln a} + 1 = e^{\ln \frac{1}{a}} + 1 = \dfrac{1}{a} + 1$.

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u \leqslant u_{n+1}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $-u_n \geqslant -u_{n+1}$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $e^{-u_n} \geqslant e^{-u_{n+1}}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 + e^{-u_n} \geqslant 1 + e^{-u_{n+1}}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n \geqslant v_{n+1}$.

On en déduit que (v_n) est strictement décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $e^{-u_n} > 0$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $e^{-u_n} + 1 > 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n > 1$.

On en déduit que (v_n) est minorée par 1.

3°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leqslant 2$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $-u_n \geqslant -2$.
D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, on $e^{-u_n} \geqslant e^{-2}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 + e^{-u_n} \geqslant 1 + e^{-2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n \geqslant 1 + e^{-2}$.

On en déduit que (v_n) est minorée par $1 + e^{-2}$.

VI.

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1°) Étudions le sens de variation de la suite (u_n).

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = 2n + 3$

Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2n + 3 > 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0$ et par conséquent, la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 0.

2°) $u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 9$, $u_3 = 16$, $u_4 = 25$, $u_5 = 26$ etc.
On peut conjecturer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n = (n+1)^2$.

3°)
a) Démontrons que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n^2$ est arithmétique.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - (n+1)^2 - u_n + n^2 = \cancel{u_n} + \cancel{2n} + 3 - \cancel{n^2} - \cancel{2n} - 1 - \cancel{u_n} + \cancel{n^2} = 2$

On en déduit que la suite (v_n) est arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 1$.

b) Exprimons u_n en fonction de *n*.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 1 + 2n$
Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - n^2$
On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n + n^2$ d'où $u_n = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.
La conjecture est ainsi démontrée.

c) Calculons u_{2009}.

$u_{2009} = (2010)^2 = 4040100$