TS

Exercices sur les limites de fonctions (1)

1 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Traduire en termes de limites lorsque c'est possible les propositions suivantes :
1°) tout intervalle ouvert contenant 2 contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.
2°) l'intervalle]2,99 ; 3,01[contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x \in [1000\,;+\infty[$.
3°) tout intervalle de la forme $]-\infty\,;A]$ (où A est un réel) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

2 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Traduire sous forme de phrase quantifiée la proposition « $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4$ ».

3 1°) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+5}$.

Déterminer un réel A tel que, si $x \geq A$, alors $f(x) \geq 1000$.

2°) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=x\sqrt{x}$.

Déterminer un réel A tel que, si $x \geqslant A$, alors $f(x) \geq 1000$.

3°) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

Déterminer un réel A tel que, si $x \geq A$, alors $f(x) \in]-0{,}001\,;0{,}001[$.

4 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+\sin x}{x-1}$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x > 1$, on a : $\dfrac{2x-1}{x-1} \leq f(x) \leq \dfrac{2x+1}{x-1}$.

2°) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Dans les exercices **5** à **10**, déterminer dans chaque cas l'ensemble de définition de la fonction f et déterminer la limite demandée.

5 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$; $\lim\limits_{+\infty} f$.

6 $f(x)=\dfrac{2x+5}{x^2-x-2}$; $\lim\limits_{2^-} f$.

On étudiera le signe du dénominateur dans un tableau de signes.

7 $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+3}}$; $\lim\limits_{+\infty} f$.

8 $f(x)=\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{+\infty} f$.

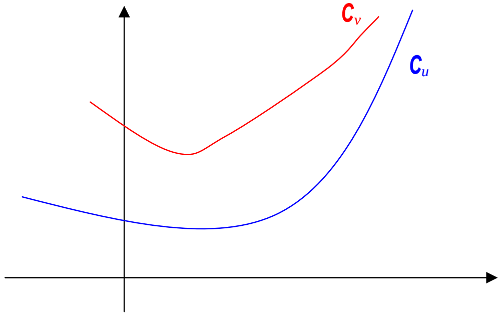
9 $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)$; $\lim\limits_{+\infty} f$.

10 $f(x)=x^2-3\sin x$; $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$.

11 Soit u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x, on ait $u(x) \leq v(x)$.

Dans la colonne de gauche, on donne une limite ; compléter l'égalité de limite *lorsque c'est possible*. Ne rien écrire dans la case lorsque ce n'est pas possible.

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=$............
$\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=$............
$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=$............
$\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=$............
$\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} v(x)=$............
$\lim\limits_{x\to-\infty} v(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=$............
$\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} v(x)=$............
$\lim\limits_{x\to-\infty} v(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=$............
$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=3$	$\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=$............
$\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=5$	$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=$............



12 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, on ait $f(x) \geq x^2$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Réponses

1 Autour des définitions formalisées des limites

1°) On reconnaît la définition du cours de $\lim\limits_{+\infty} f = l$.

$\lim\limits_{+\infty} f = 2$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

2°) On ne peut rien en déduire.

Pour $x \geqslant 1000$, la courbe de la fonction f est contenue dans une bande de plan.

]2,99 ; 3,01[est un intervalle centré en 3 mais on ne peut rien dire.

La fonction f définie par $f(x) = 3 + 0,01\sin x$ vérifie la condition de l'énoncé.

3°) On reconnaît la définition du cours. $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2 La proposition « $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$ » se traduit par « tout intervalle ouvert contenant 4 contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand ».

3 1°) $A = \sqrt{999\ 995}$ 2°) A = 100 3°) A = 100

Solution détaillée :

1°) $f : x \mapsto \sqrt{x^2+5}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$f(x) \geq 1000$ (1)

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+5} \geq 1000\\ &\Leftrightarrow x^2+5 \geq 1000^2\\ &\Leftrightarrow x^2 \geq 999\ 995\\ &\Leftrightarrow x \leq -\sqrt{999\ 995} \text{ ou } x \geq \sqrt{999\ 995}\end{aligned}$$

On pose $A = \sqrt{999\ 995}$.

Si $x \geq A$, alors $f(x) \geq 1000$.

2°) $f : x \mapsto x\sqrt{x}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$

$f(x) \geq 1000$ (1)

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow x\sqrt{x} \geq 1000\\ &\Leftrightarrow \left(x\sqrt{x}\right)^2 \geq 1000\\ &\Leftrightarrow x^3 \geq 1\ 000\ 000\end{aligned}$$

On s'arrête ici faute de pouvoir continuer (il faudrait connaître les racines cubiques).

On pose A = 100.

Si $x \geq A$, alors $\sqrt{x} \geq 10$ d'où $x\sqrt{x} \geq 1000$ soit $f(x) \geq 1000$.

3°) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$

$-0,001 < f(x) < 0,001$ (1)

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow -0,001 < \frac{1}{x\sqrt{x}} < 0,001\\ &\Leftrightarrow \left|\frac{1}{x\sqrt{x}}\right| < 0,001\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x\sqrt{x}} < 0,001\\ &\Leftrightarrow x\sqrt{x} > 1000\\ &\Leftrightarrow x^3 > 1000\ 000\end{aligned}$$

Rappel : si a est un réel strictement positif : $|X| < a \Leftrightarrow -a < X < a$.

On s'arrête ici faute de pouvoir continuer (il faudrait connaître les racines cubiques).

2 rédactions possibles

On pose A = 100. Si x > A, alors $-0,001 < f(x) < 0,001$.	On choisit A = 100. Si x > 100, alors $-0,001 < f(x) < 0,001$.

4 1°) Procéder par encadrements successifs en mettant à chaque fois des flèches pour justifier chaque passage.
2°) On applique le théorème des gendarmes ; présenter comme dans l'exemple du cours en introduisant deux fonctions u et v ; on trouve $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ (on utilise la limite d'une fonction rationnelle à l'aide des monômes de plus haut degré).

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \dfrac{2x+\sin x}{x-1}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

1°) Démontrons que pour tout réel x > 1, on a : $\dfrac{2x-1}{x-1} \leq f(x) \leq \dfrac{2x+1}{x-1}$.

On fixe un réel quelconque x > 1.

$$\left.\begin{array}{c} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ 2x-1 \leq 2x+\sin x \leq 2x+1 \end{array}\right\} + 2x$$

$$\frac{2x-1}{x-1} \leq \frac{2x+\sin x}{x-1} \leq \frac{2x+1}{x-1} \quad : (x-1) \quad (x-1>0 \text{ car } x>1)$$

Donc $\forall\, x > 1 \quad \dfrac{2x-1}{x-1} \leq f(x) \leq \dfrac{2x+1}{x-1}$.

2°) Déduisons-en la limite de *f* en + ∞.

On pose $u(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$ et $v(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

$\forall\, x > 1 \quad u(x) \leq f(x) \leq v(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2 \;^{*} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2 \;^{*} \end{array}\right\} \text{ donc d'après le théorème des gendarmes } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

* On applique la règle du quotient simplifié des monômes de plus haut degré qui permet de déterminer la limite d'une fonction rationnelle non nulle en + ∞ ou en – ∞.

$\boxed{5}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ (on applique la règle des monômes pour déterminer la limite d'une fonction rationnelle non nulle en + ∞ et en – ∞).

Rappel : La règle des monômes de plus haut degré n'est applicable que si l'on a une fonction polynôme ou rationnelle en + ∞ et en – ∞.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

$f(x)$ existe si et seulement si $(x-2)^2 \neq 0$

si et seulement si $x - 2 \neq 0$

si et seulement si $x \neq 2$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{\,2\,\} \quad f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4x+4}$

f est rationnelle non nulle donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

$\boxed{6}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;2\}$; $\lim\limits_{2^-} f = -\infty$ (tableau de signes impératif pour le dénominateur)

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \dfrac{2x+5}{x^2-x-2}$

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2 - x - 2 \neq 0$

Considérons le polynôme $x^2 - x - 2$.

Ses racines sont 2 et – 1 (on peut utiliser les racines évidentes ou les calculer avec le discriminant :
$\Delta = 1 + 8 = 9$; $\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2$ ou $x_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1$).

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;2\}$

x	– ∞		– 1		2		+ ∞
SGN de x^2-x-2		+	0	–	0	+	

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to2^-} (2x+5) = 9 \\ \lim\limits_{x\to2^-} (x^2-x-2) = 0^- \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty.$$

$\boxed{7}$ $D_f = \left]-\infty\,;-3\right[\cup \left[\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ (par tableau de signes) ; $\lim\limits_{+\infty} f = \sqrt{2}$ (limite d'une composée)

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+3}}$

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x+3 \neq 0 \\ \dfrac{2x-1}{x+3} \geq 0 \end{cases}$.

Étudions le signes de $\dfrac{2x-1}{x+3}$.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
SGN de $2x-1$		$-$		$-$	0^{num}	$+$	
SGN de $x+3$		$-$	$0^{\text{déno}}$	$+$		$+$	
SGN de $\dfrac{2x-1}{x+3}$		$+$	$\Vert$	$-$	0^{num}	$+$	

$\boldsymbol{D}_f = \left]-\infty\,;-3\right[\cup\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{2x-1}{x+3}}_{X}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2\\&\lim_{X\to2}\sqrt{X}=\sqrt{2}\end{aligned}\right\}\text{ donc par limite d'une composée } \lim_{x\to+\infty}f(x)=\sqrt{2}.$$

$\boxed{8}$ $\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}_+^*$; $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ (limite d'une composée)

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$f(x)$ existe si et seulement si $x > 0$.

On trouve $\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.

On peut écrire $f = v \circ u$ où u et v sont les fonctions définies par $u(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $v(x)=\sin x$.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{X}=0\ ^{*}\\&\lim_{X\to0}\sin X=0\end{aligned}\right\}\text{ donc par limite d'une composée } \lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

* On pourrait écrire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0^{+}$ mais la précision donnée par le + ne sert pas du tout pour la suite donc cela ne sert à rien de le mettre.

$\boxed{9}$ $\boldsymbol{D}_f = \left]-2\,;0\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[$; $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ (limite d'une composée)

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)$

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x+2\neq0\\ \dfrac{x^2}{x+2}>0\end{cases}$.

On fait un tableau de signes pour $\dfrac{x^2}{x+2}$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
SGN de x^2		$+$		$+$	0^{num}	$+$	
SGN de $x+2$		$-$	$0^{\text{déno}}$	$+$		$+$	
SGN de $\dfrac{x^2}{x+2}$		$-$	$\Vert$	$+$	0^{num}	$+$	

$\boldsymbol{D}_f = \left]-2\,;0\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[$.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{x^2}{x+2}}_{X}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty\ ^{*}\\&\lim_{X\to+\infty}\ln X=+\infty\end{aligned}\right\}\text{ donc par limite d'une composée } \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

* On applique la règle du quotient simplifié des monômes de plus haut degré qui permet de déterminer la limite d'une fonction rationnelle non nulle en $+\infty$ ou en $-\infty$.

$\boxed{10}$ $\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}$; $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ (limite par comparaison).

Solution détaillée :

$f : x \mapsto x^2 - 3\sin x$

$\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin x \leq 1$

$\times(-3)$

$3 \geq -3\sin x \geq -3$

$+\ x^2$

$x^2+3 \geq x^2-3\sin x \geq x^2-3$

On pose : $u(x) = x^2-3$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq u(x)$

Limite en + ∞ :

$\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq u(x)$

Donc d'après le théorème d'un seul gendarme, on a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en – ∞ :

$\lim_{x\to-\infty} u(x) = +\infty$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq u(x)$

Donc d'après le théorème d'un seul gendarme, on a : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Retenir : quand on a des limites avec des sinus et des cosinus, penser à faire des encadrements.

Voici un exemple de résolution complètement fausse pour le $\boxed{8}$:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-\frac{1}{x\sqrt{x}} \leq \sin \cancel{x} \times \frac{1}{\cancel{x}\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$-\frac{1}{x\sqrt{x}} \leq \sin \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right) = 0 \end{array}\right\} \text{donc d'après le théorème des gendarmes } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Voici un exemple de résolution fausse pour le $\boxed{10}$:

$$\begin{array}{ll} \forall x \in \mathbb{R} & -1 \leq \sin x \leq 1 \\ & 3 \geq -3 \sin x \geq -3 \\ & x^2 + 3 \geq x^2 - 3 \sin x \geq x^2 - 3 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+3\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-3\right) = +\infty \end{array}\right\} \text{donc d'après le théorème des gendarmes } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+3\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-3\right) = +\infty \end{array}\right\} \text{donc d'après le théorème des gendarmes } \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$