TS

Exercices sur le logarithme népérien (1)

1 <u>Sans calculatrice</u>, calculer :

$A = \ln 216 - 3(\ln 2 + \ln 3)$; $B = 2\ln\left(2+\sqrt{5}\right) + \ln\left(9-4\sqrt{5}\right)$.

2 <u>Sans calculatrice</u>, simplifier :

$A = 3(\ln 3 + \ln 5) - \ln 27 - 2\ln 10 - \ln\dfrac{1}{4}$; $B = \ln\dfrac{1}{3} + \ln\dfrac{3}{5} + \ln\dfrac{5}{7} + \ln\dfrac{7}{9}$.

3 Soit a, b, c trois réels strictement positifs donnés.

Écrire en fonction de ln a, ln b, ln c les réels $x = \dfrac{1}{4}\ln\left(a^8\right)$, $y = \ln\dfrac{a}{b} - \ln\dfrac{c}{b}$, $z = \ln\left(\dfrac{a^4}{b^3}\right)$.

4 Simplifier la somme $S = \ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \ldots + \ln\dfrac{99}{100}$.

5 Exprimer en fonction de ln 2 et de ln 5 les nombres suivants : ln1000 ; $\ln\left(\dfrac{8}{25}\right)$; ln(0,16).

6 On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f (on rédigera ainsi : « $f(x)$ existe si et seulement si … »).

2°) Pour quels x de $\mathcal{D}$ peut-on écrire $f(x) = \ln(2x-1) - \ln(x+3)$?

7 On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$.

Étudier la parité de f.

8 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

2°) Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer $f'(x)$.

9 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x+1}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

2°) Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer $f'(x)$.

10 On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \ln x$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (c'est-à-dire $\vec{i} \perp \vec{j}$). On note également $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ les courbes d'équations respectives $y = \ln x + 4$, $y = \ln(x+4)$, $y = |\ln x|$.

Recopier et compléter les phrases :

« On passe de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}_1$ par … »
« On passe de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}_2$ par … »
« On passe de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}_3$ en … »

11 On considère la fonction $f : x \mapsto 3x^2 - \ln x$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.

12 On considère la fonction $f : x \mapsto x + 2\ln x$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Etudier f (ensemble de définition, dérivée, tableau de variation, limites et conséquences graphiques pour $\mathcal{C}$).

13 On considère la fonction $f : x \mapsto ax + b\ln x$ où a et b sont des réels.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Déterminer a et b tels que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ vérifie les deux hypothèses :

H_1 : $\mathcal{C}$ passe par le point A(1 ; 2).
H_2 : $\mathcal{C}$ admet en A une tangente parallèle à la droite Δ d'équation réduite $y = x$.

14 On considère la fonction $f : x \mapsto ax + b + c\ln x$ où a, b, c sont des réels.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Déterminer (sans utiliser la calculatrice) les réels a, b, c tels que la courbe $\mathcal{C}$ de f dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ vérifie les trois hypothèses :

H_1 : $\mathcal{C}$ passe par le point A(1 ; 1).
H_2 : $\mathcal{C}$ passe par le point B(2 ; 2 ln2).
H_3 : $\mathcal{C}$ admet en B une tangente horizontale.

N. B. : Cet exercice demande de la persévérance car les calculs semblent un peu longs mais menés intelligemment, ils aboutissent assez vite.

15 Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\ln x \leqslant x - 1$.

Indication : faire le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto \ln x - x + 1$ <u>sans les limites</u> afin d'en déduire son signe.

16 Sans calculatrice, calculer le nombre $A = 5\ln\left(e^4\right) - 2\ln\dfrac{1}{e} + 4\ln\sqrt{e}$.

17 On considère la fonction $f : x \mapsto (\ln x)^3$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

2°) Démontrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer $f'(x)$.

3°) Dresser le tableau de variation de f.

4°) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?

5°) Donner le signe de f ; en déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la tangente horizontale.

6°) Tracer $\mathcal{C}$ et la tangente horizontale en prenant 1 cm pour unité graphique (faire un petit tableau de valeurs). Vérifier sur la calculatrice graphique.

18 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\ln x + 1 = 0$ (1) ; $1 - 2\ln x = 0$ (2).

19 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$ (1).

20 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\ln x)^2 - 3\ln x - 4 = 0$ (1).

Indication : utiliser le changement d'inconnue $X = \ln x$.

$\boxed{21}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(2x+1)-\ln(x-1)=1$ (1).

$\boxed{22}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(x^2-3)\leq \ln x+\ln 2$ (1).

$\boxed{23}$ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} x+y=30 & (1) \\ \ln x+\ln y=3\ln 5 & (2) \end{cases}$.

$\boxed{24}$ Déterminer les entiers naturels n tels que $(0,9)^n \leq 10^{-3}$.
N. B. : Pour cet exercice, la calculatrice est obligatoire.

$\boxed{25}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \ln x$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
1°) Déterminer l'équation réduite de la tangente T_a à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a $(a > 0)$.
2°) Déterminer l'abscisse du point A de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente passe par le point B(0, 1).
On rédigera ainsi
« $\text{B} \in T_a$ si et seulement si… ».
Tracer cette tangente.

$\boxed{26}$ On considère la fonction $f : x \mapsto x-3\ln x+1$ (on observera que f n'est pas une fonction polynôme).
On cherche la limite de f en $+\infty$.
1°) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2°) Identifier la forme indéterminée que l'on rencontre.
3°) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $f(x)=x\left(1-3\,\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}\right)$; en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
On détaillera bien les calculs en veillant à la présentation.

$\boxed{27}$ On considère la fonction $f : x \mapsto (\ln x)^2-5\ln x+1$ (on observera que f n'est pas une fonction polynôme).
On cherche la limite de f en $+\infty$.
1°) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2°) Identifier la forme indéterminée que l'on rencontre.
3°) Factoriser $f(x)$ par $(\ln x)^2$ pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$; en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\boxed{28}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{5\ln x-2}{\ln x+1}$ (on observera que f n'est pas une fonction rationnelle).
On cherche la limite de f en $+\infty$.
1°) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2°) Identifier la forme indéterminée que l'on rencontre.
3°) Factoriser $f(x)$ par $\ln x$ pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{1 ; \dfrac{1}{\text{e}}\right\}$ au numérateur et au dénominateur ; en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\boxed{29}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$.
1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2°) Etudier les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.
Vérifier sur la calculatrice graphique ou sur un ordinateur à l'aide d'un logiciel de tracé de courbes.

$\boxed{30}$ On considère la fonction $f : x \mapsto x+1-\dfrac{\ln x}{x}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$; étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ dans un tableau.
Vérifier sur la calculatrice graphique ou sur un ordinateur à l'aide d'un logiciel de tracé de courbes.

$\boxed{31}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x-2}{\ln x-1}$.
1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2°) Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer $f'(x)$.

$\boxed{32}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(2x-1)$.
1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2°) Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer $f'(x)$.

Dans les exercices $\boxed{33}$ à $\boxed{36}$, on donne une fonction f.
Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f et étudier les limites aux bornes de $\mathcal{D}$. Préciser chaque fois lorsque l'on rencontre une forme indéterminée.

$\boxed{33}$ $f : x \mapsto \dfrac{1-\ln x}{x}$ $\boxed{34}$ $f : x \mapsto x(1-\ln x)$ $\boxed{35}$ $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{x^2-1}{2x}$ $\boxed{36}$ $f : x \mapsto \dfrac{x\ln x}{x+1}$

Corrigé

1 Calculs d'expressions avec des logarithmes népériens

$A = 0$; $B = 0$

Solution détaillée :

$$A = \ln 216 - 3(\ln 2 + \ln 3)$$
$$= \ln 6^3 - 3\ln 6$$
$$= 3\ln 6 - 3\ln 6$$
$$= 0$$

$$B = 2\ln\left(2+\sqrt{5}\right) + \ln\left(9-4\sqrt{5}\right)$$
$$= \ln\left[\left(2+\sqrt{5}\right)^2\right] + \ln\left(9-4\sqrt{5}\right).$$
$$= \ln\left(9+4\sqrt{5}\right) + \ln\left(9-4\sqrt{5}\right)$$
$$= \ln\left[\left(9+4\sqrt{5}\right)\left(9-4\sqrt{5}\right)\right]$$
$$= \ln\left[9^2 - \left(4\sqrt{5}\right)^2\right]$$
$$= \ln(81-80)$$
$$= \ln 1$$
$$= 0$$

2 $A = \ln 5$; $B = -2\ln 3$

Solution détaillée :

- $A = 3(\ln 3 + \ln 5) - \ln 27 - 2\ln 10 - \ln\dfrac{1}{4}$

$$= 3\ln 3 + 3\ln 5 - \ln 3^3 - 2\ln(2\times 5) + \ln 4$$
$$= \cancel{3\ln 3} + 3\ln 5 \cancel{-3\ln 3} - 2\ln 2 - 2\ln 5 + \ln 4$$
$$= 3\ln 5 - 2\ln 2 - 2\ln 5 + \ln 2^2$$
$$= 3\ln 5 \cancel{-2\ln 2} - 2\ln 5 \cancel{+2\ln 2}$$
$$= \ln 5$$

- $B = \ln\dfrac{1}{3} + \ln\dfrac{3}{5} + \ln\dfrac{5}{7} + \ln\dfrac{7}{9}$.

$$= \cancel{-\ln 3} + \cancel{\ln 3} \cancel{-\ln 5} \cancel{+\ln 5} \cancel{-\ln 7} \cancel{+\ln 7} - \ln 9$$
$$= -\ln 9$$
$$= -2\ln 3$$

3 Simplifications d'expression littérales avec des logarithmes népériens

$x = 2\ln a$; $y = \ln a - \ln c$; $z = 4\ln a - 3\ln b$

Solutions détaillée :

Écrivons en fonction de ln a, ln b, ln c les réels $x = \dfrac{1}{4}\ln\left(a^8\right)$, $y = \ln\dfrac{a}{b} - \ln\dfrac{c}{b}$, $z = \ln\left(\dfrac{a^4}{b^3}\right)$.

$$x = \frac{1}{4}\ln\left(a^8\right)$$
$$= \frac{1}{4}\times 8\ln a$$
$$= 2\ln a$$

$$y = \ln\frac{a}{b} - \ln\frac{c}{b}$$
$$= \ln a - \ln b - \ln c + \ln b$$
$$= \ln a - \ln c$$

$$z = \ln\left(\frac{a^4}{b^3}\right)$$
$$= \ln\left(a^4\right) - \ln\left(b^3\right)$$
$$= 4\ln a - 3\ln b$$

4 $S = -\ln 100 = -2\ln 10$

Solutions détaillée :

Simplifions la somme $S = \ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + ... + \ln\dfrac{99}{100}$.

$$S = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + ... + \ln\frac{99}{100}$$
$$= \cancel{-\ln 2} + \cancel{\ln 2} \cancel{-\ln 3} + ... + \ln 99 - \ln 100$$
$$= -\ln 100$$

Il s'agit d'un procédé de calcul de somme par **« télescopage »** ou **simplification « en cascade »**.
Il reste les termes des extrémités de la somme.
Ce procédé que nous retrouverons plus tard sert à établir des formules sommatoires.

Autre méthode par produit :

$$S = \ln\left(\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times ...\times\frac{\cancel{99}}{100}\right) = \ln\frac{1}{100} = -\ln 100 = -2\ln 10$$

On simplifie à l'intérieur du produit.

5 $\ln 1000 = \ln 10^3 = 3\ln 10 = 3\ln(2\times 5) = 3\ln 2 + 3\ln 5$; $\ln\left(\dfrac{8}{25}\right) = 3\ln 2 - 2\ln 5$;

$$\ln(0{,}16) = \ln\frac{16}{100} = \ln\frac{4}{25} = \ln 4 - \ln 25 = \ln\left(2^2\right) - \ln\left(5^2\right) = 2\ln 2 - 2\ln 5$$

Solution détaillée :

Exprimons en fonction de ln 2 et de ln 5 les nombres suivants : ln1000 ; $\ln\left(\dfrac{8}{25}\right)$; ln(0,16).

On présente les calculs en colonnes.

$$\begin{aligned}\ln 1000 &= \ln 10^3\\ &= 3\ln 10\\ &= 3\ln(2\times 5)\\ &= 3\ln 2 + 3\ln 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{8}{25}\right) &= \ln 8 - \ln 25\\ &= \ln 2^3 - \ln 5^2\\ &= 3\ln 2 - 2\ln 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(0{,}16) &= \ln\frac{16}{100}\\ &= \ln\frac{4}{25}\\ &= \ln 4 - \ln 25\\ &= \ln\left(2^2\right) - \ln\left(5^2\right)\\ &= 2\ln 2 - 2\ln 5\end{aligned}$$

$\boxed{6}$ 1°) $\boldsymbol{D} = \left]-\infty;-3\right[\bigcup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ (faire un tableau de signes **<u>à la règle</u>**)

2°) L'égalité est vraie pour $x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)$

1°) **Déterminons l'ensemble de définition $\boldsymbol{D}$ de *f*.**

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases}\dfrac{2x-1}{x+3} > 0\\ x+3 \neq 0\end{cases}$ (rappel : l'accolade signifie « et »)

On dresse un tableau de signes pour résoudre l'inéquation $\dfrac{2x-1}{x+3} > 0$.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de 2*x* – 1		–		–	0	+	
Signe de *x* + 3		–	0	+		+	
Signe de $\dfrac{2x-1}{x+3}$		+	‖	–	0	+	

$\boldsymbol{D} = \left]-\infty;-3\right[\bigcup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

2°) **Déterminons les réels $x \in \boldsymbol{D}$ pour lesquels on peut écrire $f(x) = \ln(2x-1) - \ln(x+3)$ (1).**

On sait que : $\forall\,(a\,;b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \quad \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

Donc l'égalité (1) est valable pour tout réel x tel $\begin{cases}2x-1>0\\ x+3>0\end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases}x > \dfrac{1}{2}\\ x > -3\end{cases}$ soit finalement pour tout réel x tel que $\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{7}$ On commence par cherche $\boldsymbol{D}_f$: pour cela on utilise un tableau de signes (à la règle).

$\boldsymbol{D}_f = \left]-3\,;3\right[$ (est centré en 0 (il ne faut pas oublier cette condition importante) ; la fonction *f* est impaire.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$

Étudions la parité de *f*.

$\boxed{8}$ 1°) $\boldsymbol{D} = \mathbb{R}_+^*$ 2°) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

1°) **Déterminons l'ensemble de définition $\boldsymbol{D}$ de *f*.**

$\boldsymbol{D} = \mathbb{R}_+^*$

2°) **Justifions que *f* est dérivable sur $\boldsymbol{D}$ et calculer $f'(x)$.**

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, celle du dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \begin{aligned} f'(x) &= \frac{x\times\frac{1}{x} - 1\times\ln x}{x^2}\\ &= \frac{1-\ln x}{x^2}\end{aligned}$$

(on utilise la formule de dérivation d'un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$)

9 1°) $\mathcal{D}=\mathbb{R}_+^*$ 2°) $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f'(x)=\dfrac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2}$

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x+1}$

1°) **Déterminons l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de *f*.**

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x>0 \\ x\neq -1\end{cases}$

si et seulement si $x > 0$

$\mathcal{D}=\mathbb{R}_+^*$

2°) **Justifions que *f* est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer $f'(x)$.**

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, celle du dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\qquad f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times(x+1)-1\times\ln x}{x+1}$$
$$=\frac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2}$$

10 On passe de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}_1$ par la translation de vecteur $4\vec{j}$; on passe de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}_2$ par la translation de vecteur $-4\vec{i}$; on passe de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}_3$ en conservant la partie située au-dessus de l'axe des abscisses c'est-à-dire pour $x > 1$ et en effectuant la symétrique par rapport à l'axe des abscisses de la partie située en dessous c'est-à-dire pour $x\in\left]0\,;1\right[$.

N.B. : L'utilisation de la calculatrice ou d'un logiciel de tracé de courbes est très intéressante pour ce type d'exercices.

11 $T:\ y=5x-2$

Solution détaillée :

$f : x\mapsto 3x^2-\ln x$

$\mathcal{C}$: courbe représentative de f

Déterminons l'équation réduite de la tangente *T* à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.

$\mathcal{D}=\mathbb{R}_+^*$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\qquad f'(x)=6x-\frac{1}{x}$$

$f(1)=3-\ln 1$
$\quad=3$

$f'(1)=6-1$
$\quad=5$

T a pour équation $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ soit $y = 5x - 5 + 3$ c'est-à-dire $y = 5x - 2$.

12 ***f* : $x\mapsto x+2\ln x$**

Étudions *f* (ensemble de définition, dérivée, tableau de variation, limites et conséquences graphiques pour $\mathcal{C}$).

L'ensemble de définition de *f* est $\mathcal{D}=\mathbb{R}_+^*$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f'(x)=1+2\times\dfrac{1}{x}=1+\dfrac{2}{x}$ (présentation préférable en colonne)

Il n'y a pas besoin de transformer davantage l'expression de $f'(x)$ pour lire le signe de la dérivée pour $x > 0$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f'(x)>0$ donc *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	+
Variations de f	$-\infty$ ↗ $+\infty$

Remarque : il n'est pas forcément utile d'avoir recours à la dérivée pour déterminer le sens de variation de *f*.
Considérons les fonctions *u* et *v* définies par $u(x)=x$ et $v(x)=2\ln x$.
La fonction *u* est strictement croissante sur]0 ; +∞[.
La fonction *v* est strictement croissante sur]0 ; +∞[.
$f=u+v$
Donc *f* est strictement croissante sur]0 ; +∞[.

$\lim\limits_{0^+} f=-\infty$; $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$.

Détail du calcul des limites aux bornes de l'ensemble de définition : on effectue la limite d'une somme

Donc par limite d'une somme
A compléter pour 2012-2013
Donc par limite d'une somme

On met les limites dans le tableau de variation.

La courbe représentative $\mathcal{C}$ de *f* dans un repère admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

On visualise la courbe $\mathcal{C}$ sur calculatrice ou sur ordinateur à l'aide d'un logiciel de tracé de courbe.

13 $f : x \mapsto ax + b \ln x \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$

a et *b* sont des paramètres.

1°) $\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[\quad f'(x) = a + \dfrac{b}{x}$ (attention, *f* <u>n'est pas</u> une fonction polynôme).

Penser à traduire l'hypothèse H_2 par $f'(1) = 1$ (en effet, le nombre dérivé de *f* en 1 est égal au coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A et Δ a pour coefficient directeur 1).
Ne pas utiliser l'équation réduite de la tangente qui complique beaucoup les choses.
On trouve $a = 2\,; b = -1$.

Remarque : on peut aussi « faire » un système.

14 $f : x \mapsto ax + b + c \ln x \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

a, *b*, *c* sont trois paramètres.

1°) *f* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ (attention, *f* n'est pas une fonction polynôme) ; $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = a + \dfrac{c}{x}$.

2°) On établit le système suivant : $\begin{cases} a + b = 1 & (1) \\ 2a + b + c \ln 2 = 2\ln 2 & (2) \\ a + \dfrac{c}{2} = 0 & (3) \end{cases}$.

Il s'agit d'un système linéaire de trois équations à trois inconnues.
On le résout par substitution puis l'on effectue une vérification (obligatoire pour les systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues).

(1) donne : $b = 1 - a$ (1').
(3) donne : $c = -2a$ (3').

En remplaçant dans (2) on obtient alors : $2\ln 2 = 2a + 1 - a - 2a\ln 2$ (2').

(2') donne : $2\ln 2 - 1 = a(1 - 2\ln 2)$ soit $a = \dfrac{2\ln 2 - 1}{1 - 2\ln 2}$ ou encore $a = -1$;
(1') donne alors : $b = 2$.
(3') donne alors : $c = 2$.

On obtient donc $a = -1$; $b = c = 2$.
On vérifie que ces solutions conviennent (vérification à faire par écrit).

15 La dérivée doit être donnée sous la forme $f'(x) = \dfrac{1-x}{x}$ pour pouvoir étudier le signe de $f'(x)$.

On dresse le tableau de variation de *f* sur $\mathbb{R}_+^*$ (faire attention de mettre une double barre sur la dernière ligne au niveau du 0 ; par contre, on ne descend pas les barres simples).

Faire les flèches de variations à la règle.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $1 - x$		+	0	–	
Signe de x	$0^{\text{déno}}$	+		+	
Signe de $f'(x)$	‖	+	0	–	
Variations de *f*	‖	↗	0	↘	

Pour les lignes « Signe de $f'(x)$ » et « Variations de *f* », on met une double barre (sachant que la « paroi » de gauche sert pour la première barre, il n'y a donc qu'une barre à ajouter).

$f(1) = 0$ (on met cette valeur dans le tableau de variation).

On ne cherche pas les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition car elles ne servent pas pour répondre à la question.

D'après le tableau de variation, *f* admet un maximum global sur $\mathbb{R}_+^*$ égal à 0 (obtenu pour $x = 1$).
On peut donc en conclure que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) \leq 0$ soit $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x - x + 1 \leq 0$ soit $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x \leq x - 1$.

16 $A = 24$

On utilise l'égalité ln e = 1 et les règles algébriques sur la fonction logarithme népérien.

17 1°) $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$ 2°) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \dfrac{3(\ln x)^2}{x}$ (on utilise la formule de dérivation d'une fonction à une certaine puissance entière : $(u^n)' = nu'u^{n-1}$)

3°) Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
Signe de $3(\ln x)^2$	‖	+	0	+	
Signe de x	0	+		+	
Signe de $f'(x)$	‖	+	0	+	

Variations de f	$\nearrow$ 0

La dérivée de la fonction f s'annule en 1.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4°) Pour déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, on utilise les limites de référence de la fonction ln.

$\lim\limits_{0^+} f = -\infty$; $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$; $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

5°) On a : $f'(1) = 0$ donc $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

Comme $f(1) = 0$, cette tangente est confondue avec l'axe des abscisses.

Le signe de $f(x)$ est le même que celui de ln x.

x	0		1		$+\infty$
Signe de ln x	‖	–	0	+	
Signe de $(\ln x)^3$	‖	–	0	+	

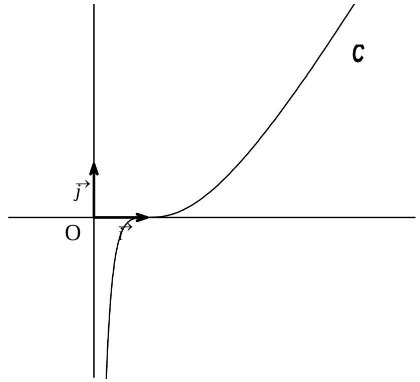
$\mathcal{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses pour $x \in \left]1\,;+\infty\right[$; $\mathcal{C}$ est au-dessous de l'axe des abscisses pour $x \in \left]0\,;1\right[$; $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 1. (La courbe $\mathcal{C}$ traverse la tangente horizontale ; on dit que le point A d'abscisse 1 est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}$).

Pour la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des abscisses, on peut faire un tableau ou faire des phrases.

Nous admettrons sans démonstration que la courbe $\mathcal{C}$ présente une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$ ce qui permet de tracer convenablement la branche infinie de la courbe $\mathcal{C}$.

6°)

x	0,5	1	2	4
$f(x)$ (valeur arrondie au centième)	–0,33	0	0,33	2,66



La tangente au point d'abscisse 1 est déjà tracée (puisqu'elle est confondue avec l'axe des abscisses).

$\boxed{18}$ Ne pas oublier les conditions d'existence. Commencer par donner les conditions d'existence afin d'établir l'ensemble de résolution. $S_1 = \left\{ \dfrac{1}{e} \right\}$; $S_2 = \left\{ \sqrt{e} \right\}$

Autre méthode :

$1 - 2 \ln x = 0$

$2\ln x = 1$

$\ln\left(x^2\right) = 1$

$\ln\left(x^2\right) = \ln e$

$x^2 = e$

$x = \sqrt{e}$ ou $x = -\sqrt{e}$

$\boxed{19}$ Ne pas oublier les conditions d'existence :

On doit avoir : $\begin{cases} x+3>0 \\ x+2>0 \\ x+11>0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x>-3 \\ x>-2 \\ x>-11 \end{cases}$ soit $x > -2$.

On représente les 3 intervalles sur un même axe (droite réelle en utilisant différentes couleurs).

On cherche les x qui vérifient les 3 conditions « réunies ».

On résout l'équation dans l'intervalle] – 2 ; +∞[.   .

L'ensemble des solutions de l'équation est S = { 1 }.

N.B. : On peut utiliser le **discriminant réduit** ou les **racines évidentes**.

Rappel :

$ax^2+bx+c\neq 0$ $(a\neq 0)$

$b'=\dfrac{b}{2}$

$\boxed{\Delta'=b'^2-ac}$

1er cas : $\boxed{\Delta'>0}$ L'équation admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$.

2e cas : $\boxed{\Delta'=0}$ L'équation admet 1 racine double dans $\mathbb{R}$: $x_0=-\dfrac{b'}{a}$.

3e cas : $\boxed{\Delta'<0}$ L'équation n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{20}$ Commencer par la condition d'existence : On doit avoir $x>0$.
Le domaine de résolution est donc]0 ; + ∞ [.

On pose $X=\ln x$ (changement d'inconnue).

L'équation (1) s'écrit $X^2-3X-4=0$ (1').
Considérons le polynôme X^2-3X-4.
Son discriminant est égal à $\Delta=9+16=25$.
$\Delta>0$ donc (1') admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$:

$X_1=-1$ et $X_2=4$

Or $X=\ln x$

Donc (1) $\Leftrightarrow$ $\ln x=-1$ ou $\ln x=4$
$\Leftrightarrow$ $\ln x=\ln \mathrm{e}^{-1}$ ou $\ln x=\ln \mathrm{e}^4$
$\Leftrightarrow$ $x=\mathrm{e}^{-1}$ ou $x=\mathrm{e}^4$
Ces deux solutions appartiennent bien à l'ensemble de résolution.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation (1) est $\mathrm{S}=\left\{\mathrm{e}^4\,;\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right\}$ (car $\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$).

$\boxed{21}$ Il faut vérifier que $\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-2}$ appartient au domaine de résolution soit en utilisant la calculatrice soit en faisant la différence avec 1 (car le domaine de résolution est]1 ; +∞[donc on compare $\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-2}$ avec 1) et en montrant que cette différence est strictement positive (mieux qu'avec la calculatrice).

$\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-2}-1=\dfrac{3}{\mathrm{e}-2}$; $\mathrm{e}>2$ donc $\mathrm{e}-2>0$ d'où $\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-2}-1>0$ soit $\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-2}>1$

On peut aussi dire que $\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-2}$ est un quotient à termes positifs dont le numérateur est plus grand que le dénominateur (car e + 1 > e – 2) ; par conséquent, ce quotient est plus grand que 1.

$\mathrm{S}=\left\{\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-2}\right\}$

$\boxed{22}$ Pour les conditions d'existence, faire un tableau de signes.
Attention : $x^2>3 \Leftrightarrow x>\sqrt{3}$ ou $x<-\sqrt{3}$ *
Pour la résolution de l'inéquation, faire un tableau de signes.

$\mathrm{S}=\left]\sqrt{3}\,;3\right]$

* $x^2-3>0 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)>0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
SGN de $x-\sqrt{3}$		$-$		$-$	0	$+$	
SGN de $x+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
SGN de $\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut aussi dire que x^2-3 est un polynôme qui admet $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$ pour racines évidentes.
Ce polynôme est donc du signe du coefficient de x^2 c'est-à-dire positif sauf pour x entre les racines.

On peut aussi utiliser la représentation graphique de la fonction carré.

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln\left(x^2-3\right)\leq \ln x+\ln 2$ (1).

$\boxed{23}$ Attention, il s'agit d'un système non linéaire. La seule méthode possible est la méthode de substitution.

$\mathrm{S}=\{(5,\ 25)\,;(25,\ 5)\}$

Autre méthode :

$$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=30\\ \ln(xy)=\ln(5^3)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+y=30\\ \ln xy=\ln(125)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+y=30\\ xy=125\end{cases}$$

On cherche deux réels x et y connaissant leur somme (30) et leur produit (125).
On sait donc que x et y sont solutions de l'équation $X^2-30X+125=0$ (E).

Le discriminant de (E) est égal à $\Delta = 20$.
Les solutions de (E) sont $X_1=5$ et $X_2=25$.

Rappel :

Soit x et y deux nombres de somme S et de produit P.
x et y sont solutions de l'équation du second degré $X^2-SX+P=0$.

$\boxed{24}$ On utilise le logarithme népérien ; les entiers naturels cherchés sont les entiers naturels supérieurs ou égaux à 66.

Solution détaillée :

Déterminons les entiers naturels n tels que $(0{,}9)^n \leqslant 10^{-3}$ (1).

(1) $\Leftrightarrow n \ln(0{,}9) \leqslant -3\ln 10$

$\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{-3\ln 10}{\ln 0{,}9}$ (en effet, 0,9 < 1 donc ln 0,9 < 0)

D'après la calculatrice, on a : $\dfrac{-3\ln 10}{\ln 0{,}9}=65{,}563...$

Or $n \in \mathbb{N}$ donc (1) $\Leftrightarrow n \geqslant 66$.

Remarque :

Le plus petit entier naturel n tel que $(0{,}9)^n \leqslant 10^{-3}$ est 66.

$\boxed{25}$ $f : x \mapsto \ln x$ e

C : courbe représentative de f dans un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ du plan

1°) Déterminons l'équation réduite de la tangente T_a à **C** au point d'abscisse a ($a > 0$).

T_a a pour équation $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ soit $y=\dfrac{1}{a}(x-a)+\ln a$ ou encore $y=\dfrac{x}{a}-1+\ln a$.

$T_a : y=\dfrac{x}{a}-1+\ln a$

2°) Déterminons l'abscisse du point A de **C** en lequel la tangente passe par le point B(0, 1).

B $\in T_a$ si et seulement si $y_{\mathrm{B}}=\dfrac{x_{\mathrm{B}}}{a}-1+\ln a$ *

si et seulement si $\dfrac{0}{a}-1+\ln a=1$

si et seulement si $\ln a = 2$

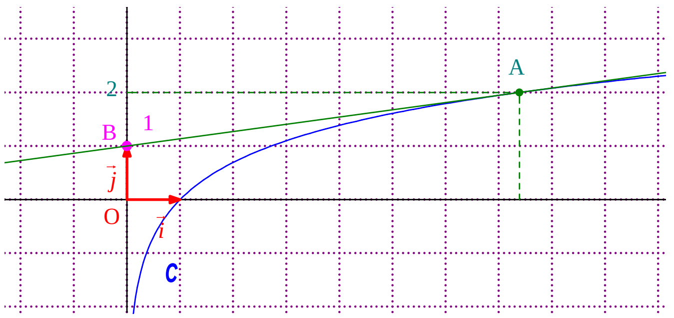
si et seulement si $a = \mathrm{e}^2$

T_a passe par B il faut et il suffit que a soit égal à e^2.

*On peut particulariser x et y pour un point de la droite (il faut bien évidemment que ce soit le même point).

Le point A appartient à la courbe **C** donc $y_{\mathrm{A}}=\ln(\mathrm{e}^2)=2$.

$\mathrm{A}(\mathrm{e}^2, 2)$



On peut aussi utiliser le fait que A appartient à T_a.

Par contre, utiliser le fait que A appartient à la fois à **C** en écrivant l'équation $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}^2}-1+\ln \mathrm{e}^2$ … ne conduit à rien du tout.

26 1°) $\boldsymbol{D} = \mathbb{R}_+^*$ 2°) On rencontre une forme indéterminée du type : "$\infty - \infty$".
3°) Le but de cette question est lever l'indétermination.
Il s'agit d'une « factorisation forcée ».
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

27 1°) $\boldsymbol{D} = \mathbb{R}_+^*$ 2°) On rencontre une F.I du type "$\infty - \infty$".
3°) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
La technique du changement de variable est possible mais à éviter pour l'instant.

28 1°) $\boldsymbol{D} = \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{ \dfrac{1}{\mathrm{e}} \right\}$ 2°) On rencontre une F.I. du type "$\dfrac{\infty}{\infty}$". 3°) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$

29 1°) $\boldsymbol{D} = \left]0\,;1\right[\bigcup \left]1\,;+\infty\right[$
Il y a trois bornes pour l'ensemble de définition : 0, 1, +∞.
On étudie la limite de *f* en 0 (uniquement à droite car la fonction est n'est pas définie pour des valeurs de *x* inférieures à 0), la limite de *f* en 1 par valeurs supérieures et inférieures (à gauche et à droite).

2°) $\lim\limits_{0^+} f = 0$; $\lim\limits_{+\infty} f = 0$; $\lim\limits_{1^-} f = -\infty$; $\lim\limits_{1^+} f = +\infty$

30 $f : x \mapsto x + 1 - \dfrac{\ln x}{x}$

Solution détaillée :

Reconnaissance d'asymptote oblique.

On observe la forme de l'expression de la fonction *f*.

$$f(x) = \underbrace{x + 1}_{\text{partie affine}} \qquad \underbrace{-\frac{\ln x}{x}}_{\text{partie qui tend vers 0 quand } x \to +\infty \text{ (limite de référence)}}$$

On observe que cette expression est constituée d'une partie affine et d'une partie qui tend vers 0.

Pour démontrer que la courbe admet une asymptote oblique, on effectue un calcul de limite.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x+1) \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{\ln x}{x} \right) = 0$ (limite de référence) donc on en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = x + 1$ pour asymptote oblique <u>en + ∞</u> (précision qu'il ne faut pas oublier de donner).

Etudions la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.

On pose $g(x) = f(x) - (x+1)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = -\dfrac{\ln x}{x}$

x	0		1		$+\infty$
Signe de $-\ln x$	‖	+	0	–	
Signe de x	0	+		+	
Signe de $-\dfrac{\ln x}{x}$	‖	+	0	–	
Position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ	‖	$\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ	$\mathcal{C}$ et Δ sont sécantes au point d'abscisse 1	$\mathcal{C}$ est au-dessous de Δ	

$\mathcal{C}$ est au-dessous de Δ pour $x \in \left]1\,;+\infty\right[$; $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ pour $x \in \left]0\,;1\right[$; $\mathcal{C}$ et Δ sont sécantes au point d'abscisse 1.

31 1°) $f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} \ln x - 1 \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} \ln x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x \neq \mathrm{e} \\ x > 0 \end{cases}$

$\boldsymbol{D} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{ \mathrm{e} \}$

2°) *f* est dérivable sur $\boldsymbol{D}$ car c'est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\boldsymbol{D}$, la fonction figurant au dénominateur ne s'annulant pas sur $\boldsymbol{D}$.

2°) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{ \mathrm{e} \} \quad f'(x) = \dfrac{1}{x(\ln x - 1)^2}$

32 1°) $\boldsymbol{D} = \left] \dfrac{1}{2}\,;+\infty \right[$

2°) *f* est la composée d'une fonction affine (non nulle) suivie de la fonction logarithme népérien donc *f* est dérivable sur $\boldsymbol{D}$.

$\forall x \in \left] \dfrac{1}{2}\,;+\infty \right[\quad f'(x) = \dfrac{2}{2x-1}$ (formule du cours donnant la dérivée de $x \mapsto \ln(ax+b)$ ou dérivée de ln *u* où *u* est une fonction : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$)

33 $\boldsymbol{D} = \mathbb{R}_+^*$; $\lim\limits_{0^+} f = +\infty$; $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ (FI du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » ; il faut faire une réécriture : $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}$).

$\boxed{34}$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$; $\lim\limits_{0^+} f = 0$ (FI du type « $0 \times \infty$ » : écrire $f(x) = x - x\ln x$ et on utilise $\lim\limits_{x \to 0^+}(x\ln x) = 0$) ; $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ (pas de problème ; limite d'un produit) $\boxed{35}$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$ $\lim\limits_{0^+} f = -\infty$ (écrire : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2x}$ et faire chaque limite ; il faut détailler $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ qui n'est pas une limite de référence) ; $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ (on utilise la même réécriture)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+ \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

$\boxed{36}$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$; $\lim\limits_{0^+} f = 0$ (on utilise la limite de référence $\lim\limits_{x \to 0^+}(x\ln x) = 0$) ; $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ (FI du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » ; écrire $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + \dfrac{1}{x}}$).

Rédaction pour les ensembles de définition : présentation à l'aide d'une chaîne d'équivalences

« $f(x)$ existe si et seulement si …..

si et seulement si …..

si et seulement si ….. »

$f(x)$ et pas f !

Ne pas confondre CE (conditions d'existence) pour les équations et les inéquations et ensemble de définition d'une fonction.

Exercices $\boxed{6}$ et $\boxed{7}$:

Pour étudier l'ensemble de définition, on est obligé d'analyser les **types de problèmes** qui se posent.

Tableaux de signes : je demande qu'ils soient faits à la règle (pas à main levée !).