Chapitre 16

Fonctions polynômes du second degré (représentation, variations, extremums)

I. Variations d'une fonction polynôme du second degré

1°) Etude

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$ (forme canonique)

$x \overset{u}{\mapsto} \underbrace{x + \dfrac{b}{2a}}_{X}$

$X \overset{v}{\mapsto} \underbrace{X^2}_{Y}$

$Y \overset{w}{\mapsto} aY - \dfrac{\Delta}{4a}$

On pose : $u(x) = x + \dfrac{b}{2a}$

$v(x) = x^2$

$w(x) = ax - \dfrac{\Delta}{4a}$

$f = w \circ v \circ u$

1$^{\text{er}}$ cas : $\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
Variation de u	↗ $-$	0	$+$ ↗
Variations de $v \circ u$	↘	0	↗
Variations de $w \circ v \circ u$	↘	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↗

2$^{\text{e}}$ cas : $\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
Variation de u	↗ $-$	0	$+$ ↗
Variations de $v \circ u$	↘	0	↗
Variations de $w \circ v \circ u$	↗	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↘

2°) Règle des variations d'une fonction polynôme du second degré (admise sans démonstration)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$

Variations
2 cas

$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
Variations de f	↘	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	↗

$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
Variations de f	↗	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	↘

3°) Exemple

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -x^2 + 4x + 3$

Dresser le tableau de variation de f.

Recensement des coefficients :

$a = -1$; $b = 4$; $c = 3$

$-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{-2} = 2$

$a < 0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Variations de f	↗	7	↘

$f(2) = -2^2 + 4 \times 2 + 3 = 7$

La fonction *f* est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2]$.

La fonction *f* est décroissante sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.

II. Extremums

1°) Règle

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$

• Si $a > 0$, alors *f* admet un **minimum global** (ou minimum absolu) sur $\mathbb{R}$, obtenu pour $x = -\dfrac{b}{2a}$.

• Si $a < 0$, alors *f* admet un **maximum global** (ou maximum absolu) sur $\mathbb{R}$, obtenu pour $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Dans les deux cas, cet extremum est égal à $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

2°) Remarque

• On peut utiliser directement ce résultat en exercice.

• Application aux problèmes d'optimisation (on cherche à optimiser une certaine grandeur, par exemple une longueur, un périmètre, une longueur ; pour cela on étudie une fonction dont étudie les extremums).

III. Représentation graphique des fonctions polynômes du second degré

1°) Etude

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$

On se place dans un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$

On pose : $u(x) = ax^2$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = u\left(x + \dfrac{b}{2a}\right) - \dfrac{\Delta}{4a}$

Donc $\mathcal{C}_f$ est l'image de $\mathcal{C}_u$ par la translation de vecteur $-\dfrac{b}{2a}\vec{i} - \dfrac{\Delta}{4a}\vec{j}$.

$\mathcal{C}_u$ est une parabole de sommet O (origine du repère).

2°) Règle

La courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ est une **parabole** de **sommet** $\text{S}\left|\begin{array}{l} -\dfrac{b}{2a} \\ f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) \end{array}\right.$.

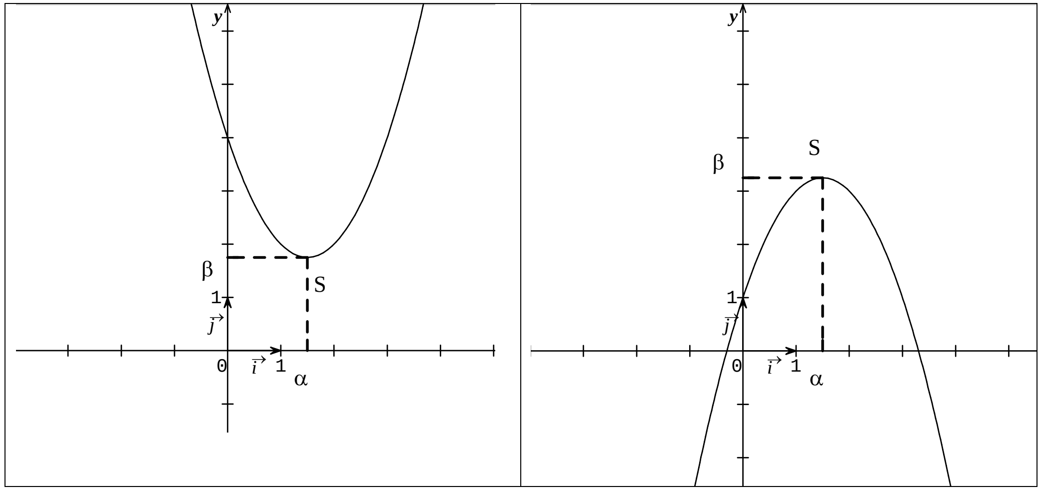
• Si $a > 0$, alors les deux branches infinies sont **tournées vers le haut** (on dit aussi vers les $y > 0$; on dit que la fonction est convexe)
• Si $a < 0$, alors les deux branches infinies sont **tournées vers le bas** (on dit aussi vers les $y < 0$; on dit que la fonction est concave)

Si le **repère orthogonal**, elle admet la droite Δ d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ pour **axe de symétrie**.

N.B. :

$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{\Delta}{4a}$

Il n'est cependant pas utile d'apprendre ce résultat.



3°) Tracé (à savoir par cœur)

• On place le sommet S.
• On utilise quelques points (au moins deux de part et d'autre du sommet)

4°) Exemple

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -2x^2 + 6x - 1$

Tracer $\mathcal{C}_f$.

(Recensement des coefficients : $a=-2$; $b=6$; $c=-1$)

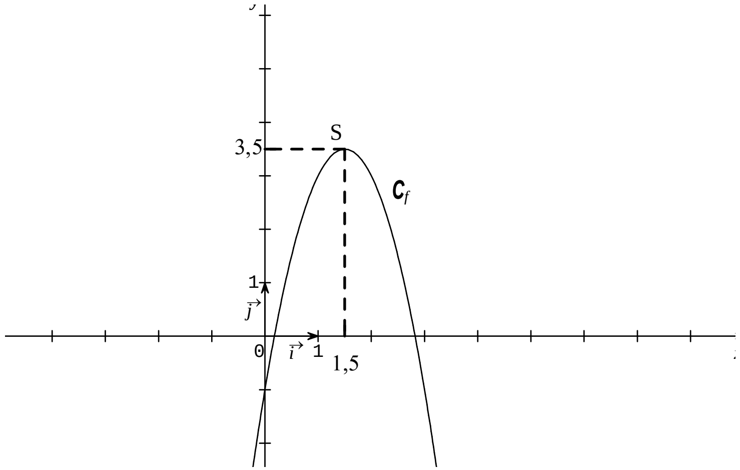
$$-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{2\times(-2)}=\frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{7}{2}$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ est une parabole de sommet S $\left| \begin{array}{l} x_S=\dfrac{3}{2} \\ y_S=\dfrac{7}{2} \end{array} \right.$ tournée vers le bas car $a<0$.

On cherche au moins cinq points.

x	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3
y	-1	3	$\frac{7}{2}$	3	-1



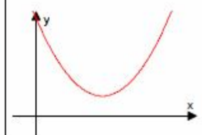
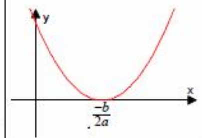
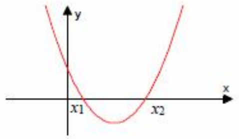
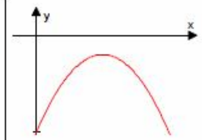
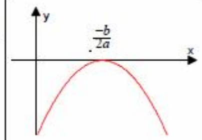
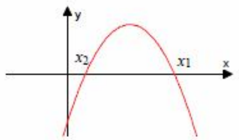
La parabole arrive bien platement au sommet.

5°) Remarques

- On voit que les coordonnées du sommet de la parabole qui représente la fonction apparaissent dans le tableau de variations de la fonction.

- Les solutions éventuelles de l'équation $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ sont les abscisses des points d'intersection (s'ils existent) de la courbe d'équation $y=ax^2+bx+c$ et de l'axe des abscisses.

Trinôme du second degré

	$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
	Racines de ax^2+bx+c	Pas de racines	Une racine double $x_0=-\frac{b}{2a}$	Deux racines distinctes $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
	Factorisation de ax^2+bx+c	Pas de factorisation	$a(x-x_0)^2$	$a(x-x_1)(x-x_2)$
a positif	Position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses			
	Signe de ax^2+bx+c	x : $P(x)$: $+$	x : $\frac{-b}{2a}$ $P(x)$: $+$ 0 $+$	x : x_1 x_2 $P(x)$: $+$ 0 $-$ 0 $+$
a négatif	Position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses			
	Signe de ax^2+bx+c	x : $P(x)$: $-$	x : $\frac{-b}{2a}$ $P(x)$: $-$ 0 $-$	x : x_2 x_1 $P(x)$: $-$ 0 $+$ 0 $-$