1^ère^ S3

Devoir pour le vendredi 6 novembre 2009

Les exercices I à III comportent un travail informatique : les exercices I et II nécessitent l'utilisation du logiciel de calcul formel *XCas* (pour factoriser des polynômes) ; l'exercice III nécessite l'utilisation du logiciel *Geogebra* (pour réaliser une figure dynamique et visualiser un lieu géométrique).

I. On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x^2+2}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de *f*. A priori, à quelle famille de fonctions appartient la fonction *f* ?
2°) Représenter sur l'écran d'une calculatrice graphique ou sur un ordinateur la courbe représentative de *f*.
Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de *f* ?
3°) Démontrer par le calcul la conjecture émise au 2°).
On pourra s'aider du logiciel *XCas* pour trouver des idées.

II. On considère le polynôme $P(x)=x^3+3x^2-4$.

Déterminer une racine évidente de $P(x)$; en déduire une factorisation de $P(x)$.
Vérifier le résultat obtenu à l'aide du logiciel *XCas*.

III. Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère la parabole $\mathcal{C}$ d'équation $y=x^2$.

Pour tout réel *m*, on note D_m la droite d'équation $y=x+m$.

Travail informatique sur *Geogebra*

1°) Dans *Saisie* (en bas de la figure), commencer par définir la fonction *f* : $f(x)=x\wedge 2$. Appuyer sur *Entrée*.
2°) Définir un paramètre réel *m* à l'aide du bouton Curseur (6^e^ colonne de boutons en partant de la gauche).
Il faut cliquer à un endroit quelconque de la figure.
On prendra –10 et 10 pour bornes de *m*.
3°) Tracer la droite D_m.
Dans *Saisie*, taper : $y=x+m$. Appuyer sur *Entrée*.
4°) Définir le point A comme l'un des points d'intersection de la droite D_m et de la courbe $\mathcal{C}$ lorsqu'il existe.
Pour cela, cliquer sur l'icône permettant de définir un point (2^e^ bouton en partant de la gauche), aller dans *Intersection entre deux objets* ; cliquer alors sur la droite D_m et sur la courbe $\mathcal{C}$.
Le point A se place alors.
Définir de même le point B comme le deuxième point d'intersection de la droite D_m et de la courbe $\mathcal{C}$.
5°) Définir le point I, milieu du segment [AB].
Pour cela, cliquer sur l'icône permettant de définir un point (2^e^ bouton en partant de la gauche), sélectionner *Milieu ou centre* ; cliquer alors sur les extrémités A et B du segment dont on veut obtenir le milieu.
Un point C se place alors au milieu du segment [AB] ; cliquer sur ce point et sélectionner *Renommer* pour l'appeler I.
6°) Changer la valeur de *m* à l'aide du curseur. Pour cela, cliquer sur le bouton *Déplacer* (1^er^ bouton en partant de la gauche) puis retourner sur le curseur en cliquant dessus.
Cliquer sur le point I et sélectionner le mode *Trace activée*.

Conjecturer alors :

- la position relative de toutes les droites D_m ;
- le nombre de points d'intersection de D_m et $\mathcal{C}$ suivant les valeurs de *m* ;
- l'ensemble décrit par le point I.

Refaire le travail précédent sans lire les indications.

Travail mathématique sur papier

1°) Expliquer pourquoi toutes les droites D_m sont parallèles.
2°) Former une équation donnant les abscisses des points d'intersection éventuels de $\mathcal{C}$ et de la droite D_m.
On rédigera ainsi :
« Les abscisses des points d'intersection éventuels de $\mathcal{C}$ et de la droite D_m sont solutions de l'équation… ».
Mettre cette équation sous la forme ……….. = 0.
On note (E) cette équation.
3°) Déterminer le nombre de racines de l'équation (E) suivant les valeurs de *m* (on ne demande pas d'exprimer ces racines lorsqu'elles existent). En déduire le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite D_m suivant les valeurs de *m*.
On fera une conclusion claire en discutant suivant les valeurs de *m*. On rédigera la conclusion sur le modèle ci-dessous :

- Si $m>\ldots$, alors ….
- Si $m<\ldots$, alors ….
- Si $m=\ldots$, alors ….

4°) Lorsque $\mathcal{C}$ coupe la droite D_m en deux points A et B, éventuellement confondus, on note I le milieu de [AB].
a) Calculer l'abscisse x_{I} du point I (on ne demande pas de calculer les coordonnées de A et B ; on pensera à utiliser la formule donnant la somme des racines d'une équation du second degré).
En déduire que I appartient à une droite fixe Δ.
b) En utilisant l'équation réduite de D_m, calculer y_{I} en fonction de *m*.
c) Déduire des deux questions précédentes l'ensemble des points I.

Aides pour la question 4°) a) :

On note x_{I} et y_{I} les coordonnées de I (notation traditionnelle des coordonnées d'un point dans un repère).
De même, on notera (x_{A}, y_{A}), (x_{B}, y_{B}) les coordonnées respectives des points A et B.
On utilisera la formule donnant les coordonnées d'un milieu dans le plan muni d'un repère.
On utilisera le fait que x_{A} et x_{B} sont solutions de l'équation (E).

IV. Soit ABCD un parallélogramme.
On considère les points I, J, K, L définis par les égalités vectorielles :
$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (1), $\overrightarrow{\mathrm{BJ}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ (2), $\overrightarrow{\mathrm{CK}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ (3), $\overrightarrow{\mathrm{DL}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ (4).
Faire une figure (on prendra la droite (AB) « horizontale », A à gauche de B, C et D « au-dessus » de (AB)).
Ecrire les hypothèses.

Démontrer que IJKL est un parallélogramme.

V. Facultatif : exercice de réflexion

Soit *a*, *b*, *c*, *d* quatre réels tels que l'on ait $a^2+b^2+c^2+d^2=ab+bc+cd+da$.
Démontrer que *a*, *b*, *c*, *d* sont égaux.

$1^{\text{ère}}$ S3 — Correction du devoir pour le 6 novembre 2009

I. $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x^2+2}$.

1°) $\boldsymbol{D}=\mathbb{R}$

A priori, la fonction *f* appartient à la famille des fonctions rationnelles car son expression est le quotient de deux polynômes.
2°) D'après la calculatrice, il semble que *f* soit une fonction affine.
3°) Démontrons par le calcul la conjecture du 2°).

$f(x)=\dfrac{x^2(x-1)+2(x-1)}{x^2+2}$ (on fait une réécriture du numérateur de $f(x)$ afin de pouvoir factoriser le numérateur)

$f(x)=\dfrac{\cancel{(x^2+2)}(x-1)}{\cancel{x^2+2}}$

$\boxed{f(x)=x-1}$

On en conclut que *f* est une <u>fonction affine</u>.

II. $P(x)=x^3+3x^2-4$.

$P(1)=0$.

On en déduit que $P(x)$ est factorisable par $(x-1)$.

Il existe donc trois réels *a*, *b*, *c* tels que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$.

Pour trouver *a*, *b*, *c*, il y a trois méthodes :

1$^{\text{ère}}$ méthode : coefficients indéterminés
Il faut être très rigoureux sur la rédaction.
2$^{\text{e}}$ méthode : division euclidienne
3$^{\text{e}}$ méthode : schéma de Hörner

On trouve : $a=1$; $b=4$; $c=4$.

$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\quad P(x)=(x-1)(x^2+4x+4)}$

On peut observer la présence d'une identité remarquable dans le second facteur qui permet de nouveau de factoriser le polynôme.

$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\quad P(x)=(x-1)(x+2)^2}$

III. $\boldsymbol{C}$: $y=x^2$; D_m : $y=x+m$ (il s'agit d'une famille de droites).

1°) Toutes les droites D_m ont le même coefficient directeur 1 donc elles sont parallèles.
(L'ordonnée à l'origine est m ; elle est donc variable.)

2°) Les abscisses des points d'intersection éventuels de $\boldsymbol{C}$ et de la droite D_m sont solutions de l'équation $x^2=x+m$.
Cette équation s'écrit aussi $x^2-x-m=0$ (E).

Considérons le polynôme : x^2-x-m.
$a=1\qquad b=-1\qquad c=-m$

Son discriminant est égal à : $\Delta=1+4m$.
Le nombre de racines du polynôme dépend du signe de Δ.
On discute suivant les valeurs du paramètre m.

Discussion :

- Si $m>-\dfrac{1}{4}$, alors $\Delta>0$.
  Dans ce cas, le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$; par suite, $\boldsymbol{C}$ et D_m se coupent en deux points distincts.
- Si $m<-\dfrac{1}{4}$, alors $\Delta<0$.
  Dans ce cas, le polynôme n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$; par suite, $\boldsymbol{C}$ et D_m n'ont aucun point commun.
- Si $m=-\dfrac{1}{4}$, alors $\Delta=0$.
  Dans ce cas, le polynôme admet une racine double dans $\mathbb{R}$; par suite, $\boldsymbol{C}$ et D_m ont un point commun.

3°) Dans toute cette question, on a : $\boxed{m\geq-\dfrac{1}{4}}$.

a) I est le milieu de [AB] donc $x_{\text{I}}=\dfrac{x_{\text{A}}+x_{\text{B}}}{2}$.

Rappel de la règle sur la somme et le produit des racines d'une équation du second degré

On considère une équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ admettant deux racines deux racines x_1 et x_2 distinctes ou confondues dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire tel que le discriminant soit positif ou nul).

On a : $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ et $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

Ici, x_{A} et x_{B} sont solutions de l'équation (E).

Donc $x_{\text{A}}+x_{\text{B}}=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{1}=1$ (formule sur la somme des racines d'une équation du second degré).

D'où $x_{\text{I}}=\dfrac{1}{2}$.

On en déduit que I appartient à la droite Δ d'équation $x=\dfrac{1}{2}$.

b) On sait que : $\text{A}\in D_m$ et $\text{B}\in D_m$.
De plus, I est le milieu de [AB].
On en déduit que $\text{I}\in D_m$.

(**Explication :** quand on a deux points d'une droite, le milieu du segment défini par ces deux points appartient à la droite ; ce n'est vrai que pour une droite, mais pas pour une courbe).
On utilise l'équation réduite de D_m pour calculer l'ordonnée de I.

$y_{\mathrm{I}} = x_{\mathrm{I}} + m = m + \dfrac{1}{2}$

Si $m \geq -\dfrac{1}{4}$, alors $m + \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{4}$ et $y_{\mathrm{I}} \geq \dfrac{1}{4}$.

On en déduit que lorsque m décrit l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{4}\,;+\infty\right[$, I décrit la demi-droite définie par : $x = 1$ et $y \geq \dfrac{1}{4}$.

IV. Méthode : exprimons les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{LK}}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$.

On effectue une décomposition des deux vecteurs à l'aide de la relation de Chasles.

$\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BJ}} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$\overrightarrow{\mathrm{LK}} = \overrightarrow{\mathrm{LD}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}} + \overrightarrow{\mathrm{CK}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DC}} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

On en déduit que l'on a : $\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \overrightarrow{\mathrm{LK}}$.
Par suite, le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.

V.

Idée : on calcule la somme $S = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2$.

$S = 2\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - da\right)$

Or on a : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$.
Donc $S = 0$.

De plus, S est positive ou nulle (car c'est une somme de carrés).
Or la somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chaque nombre est positif ou nul).

Donc on en déduit que $(a-b)^2 = 0$, $(b-c)^2 = 0$, $(c-d)^2 = 0$, $(d-a)^2 = 0$.

Par suite, on a : $a - b = 0$, $b - c = 0$, $c - d = 0$, $d - a = 0$.

Par conséquent, $a = b$, $b = c$, $c = d$ et $d = a$.

Finalement, on obtient : $a = b = c = d$.