TS 3 — Devoir pour le vendredi 6 novembre 2009

I. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 4$.

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + a$.

1°) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n ; en déduire une valeur de a telle que la suite (v_n) soit géométrique.

2°) Exprimer alors v_n puis u_n en fonction de n.

3°) Pour tout entier naturel n, on pose $s_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ et $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

Exprimer s_n puis S_n en fonction de n.

II. On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(e^x + 1)$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : le centimètre).

1°) Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2°) Etudier f (dérivée, limites et conséquences graphiques éventuelles, tableau de variation).

3°) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ et préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.

4°) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et la droite Δ ; tracer également la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

5°) a) Démontrer, sans faire de calcul, que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

b) Soit y un réel strictement positif.

Résoudre l'équation $f(x) = y$ (il faut exprimer x en fonction de y) ; en déduire l'expression de f^{-1}.

III. Dans chaque cas, on considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par son expression.

Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Etablir le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ (avec les limites et les extremums éventuels).

Déterminer l'image des intervalles [0 ; 1] et [1 ; + ∞[par f puis l'image de $\mathbb{R}$ par f.

1°) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

2°) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

TS 3

Correction du devoir pour le vendredi 6 novembre 2009

I. $u_0 = 3$; $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 4$.

$v_n = u_n + a$.

1°) Exprimons v_{n+1} en fonction de v_n ; déduisons-en une valeur de *a* telle que la suite (v_n) soit géométrique.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_{n+1} + a = \frac{2}{3}u_n + 4 + a = \frac{2}{3}(v_n - a) + 4 + a = \frac{2}{3}v_n + 4 + \frac{a}{3}$$

Pour que la suite (v_n) soit géométrique, il suffit de choisir *a* tel que $4 + \frac{a}{3} = 0$ c'est-à-dire $a = -12$.

Dans toute la suite, on prend $a = -12$.

Pour cette valeur de *a*, la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

2°) Exprimons alors v_n puis u_n en fonction de *n*.

On peut écrire $\forall n \in \mathbb{N} \;\; v_n = v_0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$v_0 = u_0 - 12 = 3 - 12 = -9$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \;\; v_n = -9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N} \;\; v_n = u_n - 12$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \;\; v_n + 12 = u_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 12}$$

3°) $s_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

On utilise la formule sommatoire pour la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

$$\boxed{s_n = -9 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = -27\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]}$$

$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

Il n'y a pas de formule permettant de réduire cette somme car la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique).

On va utiliser la 1ère somme que l'on a calculée en exploitant la relation entre les suites (u_n) et (v_n).

$S_n = (v_0 + 12) + (v_1 + 12) + ... + (v_n + 12)$ (on utilise la relation entre u_n et v_n : $u_n = v_n + 12$)

$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n + 12(n+1)$

$S_n = s_n + 12(n+1)$

$$S_n = -27\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] + 12(n+1)$$

$$S_n = 27 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 27 + 12n + 12$$

$$\boxed{S_n = 27 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 12n - 15}$$

II. $f(x) = \ln\left(e^x + 1\right)$.

1°) <u>Démontrons que *f* est définie sur $\mathbb{R}$.</u>

$f(x)$ existe si et seulement si $e^x + 1 \geq 0$

si et seulement si $e^x \geq -1$ (Toujours vrai)

On en déduit que *f* est définie sur $\mathbb{R}$.

2°) <u>Etudions *f*.</u>

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après la règle sur les composées de fonctions dérivables.

On peut détailler ainsi :

f = *v* o *u* où *u* et *v* sont les fonctions définies par $u(x) = e^x + 1$ et $v(x) = \ln x$.

La fonction *u* est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0\,;+\infty[$ (c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x) > 0$).

La fonction *v* est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On peut faire le schéma suivant montrant les intervalles de dérivabilité :

$\mathbb{R} \xrightarrow{u}]0\,;+\infty[\xrightarrow{v} \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

Or $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$
donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) > 0$.

On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	
Variations de f	0 ↗	$+\infty$

Limite en +∞

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\underbrace{e^x + 1}_{X} \right) = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \end{array}\right\} \text{donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(e^x + 1\right) = +\infty.$$

D'où $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

Limite en –∞

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\underbrace{e^x + 1}_{X} \right) = 1 \\ \lim\limits_{X \to 1} \ln X = \ln 1 = 0 \text{ (continuité de la fonction ln)} \end{array}\right\} \text{donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

Par suite, <u>la courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $-\infty$</u>.

3°) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \ln\left[e^x \left(1 + \dfrac{1}{e^x} \right) \right]$

$$f(x) = \ln e^x + \ln\left(1 + e^{-x}\right)$$

$$\boxed{f(x) = x + \ln\left(1 + e^{-x}\right)}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - x = \ln\left(1 + e^{-x}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + e^{-x}\right) = 1 \\ \lim\limits_{X \to 1} \ln X = 0 \text{ (continuité de la fonction ln)} \end{array}\right\} \text{donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + e^{-x}\right) = 0.$$

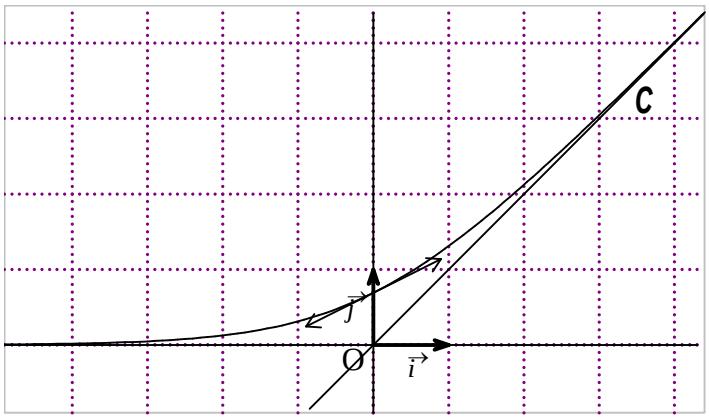
D'où $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - x \right] = 0}$

Par suite, la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = x$ pour asymptote oblique en +∞.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad 1+\mathrm{e}^{-x} > 0$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) > 0$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - x > 0$

La courbe $\mathcal{C}$ est toujours située au-dessus de la droite Δ d'équation $y = x$.

3°) $f'(0) = \dfrac{1}{2}$



5°) a) Démontrons que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

f est continue sur $\mathbb{R}$.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Le théorème de la bijection s'applique.
f établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$.
Le travail sur les limites permet de dire que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$.

Donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

b) Résolvons l'équation $f(x) = y$ où y un réel strictement positif.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right) = y \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^x + 1 = \mathrm{e}^y \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y - 1 \\ &\Leftrightarrow x = \ln\left(\mathrm{e}^y - 1\right) \quad \text{(par hypothèse, on a : } y > 0 \text{ d'où : } \mathrm{e}^y - 1 > 0\text{)} \end{aligned}$$

On en déduit l'expression de f^{-1} :
$\forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad f^{-1}(y) = \ln\left(\mathrm{e}^y - 1\right)$

III. Détermination d'images d'intervalles par des fonctions continues

1°) $f([0\,;1]) = [0\,;1]$; $f([1\,;+\infty[) =]0\,;1]$; $f(\mathbb{R}) = [-1\,;1]$
2°) $f([0\,;1]) = [0\,;1]$; $f([1\,;+\infty[) =]-1\,;0]$; $f(\mathbb{R}) =]-1\,;1]$