1ère L Option

Exercices sur les fonctions : autour des courbes de fonctions

Pour les courbes représentatives des fonctions définies dans les exercices suivants, on se place dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1 On considère la fonction $f : x \mapsto x^2+5$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique.
Dire si chacun des points appartient à la courbe $\mathcal{C}$ ou pas.

A(– 2 ; 9) ; B(3 ; 13) ; C($\sqrt{2}$; 7).

Aide :

Pour le point A, on calcule l'image de – 2 par *f*.
Si le résultat est égal à 9 alors on peut dire que A appartient à $\mathcal{C}$, sinon on dit que A n'appartient pas à $\mathcal{C}$.

2 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique.
Dire si chacun des points appartient à la courbe $\mathcal{C}$ ou pas.

A(– 2 ; $\frac{1}{5}$) ; B(3 ; $\frac{1}{10}$) ; C($\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}$) ; D(0 ; 1) ; E(1 ; $\frac{1}{6}$) ; F(2 ; $\sqrt{3}$).

3 On considère la fonction $f : x \mapsto 1-x^2$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
1°) Calculer l'ordonnée du point A de $\mathcal{C}$ qui a pour abscisse -3.
2°) Déterminer les abscisses des points B et C de $\mathcal{C}$ qui ont pour ordonnée – 2 ($x_\text{B} < x_\text{C}$).

Aide :

1°) Pour déterminer l'ordonnée du point A, on calcule $f(-3)$.
2°) Pour déterminer les abscisses des points B et C, on résout l'équation $f(x)=-2$.

4 On considère la fonction $f : x \mapsto (x+3)(x-1)$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique.
1°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées.
2°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection B et C de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses ($x_\text{B} < x_\text{C}$).

Aide :

1°) Comme A appartient à l'axe des ordonnées, son abscisse est égale à 0.
Pour déterminer l'ordonnée du point A, on calcule $f(0)$.
2°) Pour déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses, on résout l'équation $f(x)=0$.
On trouve ainsi les abscisses des points B et C.
Les points B et C appartiennent à l'axe des abscisses donc leur ordonnée est nulle.

5 On considère la fonction $f : x \mapsto x^2-1$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique.
Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B de $\mathcal{C}$ avec la droite D d'équation $y=x-1$ (on prendra $x_\text{A} < x_\text{B}$).

Aide :
On résout l'équation $f(x)=x-1$.

6 On considère les fonctions $f : x \mapsto (3x+1)(2x-3)$ et $g : x \mapsto -(2x-3)^2$.
On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' leurs représentations graphiques respectives.
Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' (on prendra $x_\text{A} < x_\text{B}$).

Aide :
On résout l'équation $f(x)=g(x)$.

7 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-3}{x+1}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique.
1°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées.
2°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection B de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

8 On considère la fonction $f : x \mapsto (x+2)^2-1$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique.
Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses (on prendra $x_\text{A} < x_\text{B}$).

Solution détaillées

$\boxed{1}$ $f : x \mapsto x^2+5$

2 présentations possibles :

$f(-2)=(-2)^2+5=9=y_A$ donc A $\in \mathcal{C}$

$(x_A)^2+5=9=y_A$ donc A $\in \mathcal{C}$

$f(3)=3^2+5=14 \neq y_B$ donc B $\notin \mathcal{C}$

$f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2+5=7=y_C$ donc C $\in \mathcal{C}$

$\boxed{2}$ $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$

2 présentations possibles :

$f(-2)=\dfrac{1}{(-2)^2+1}=\dfrac{1}{5}=y_A$ donc A $\in \mathcal{C}$

$f(3)=\dfrac{1}{3^2+1}=\dfrac{1}{10}=y_B$ donc B $\in \mathcal{C}$

$f(\sqrt{2})=\dfrac{1}{(\sqrt{2})^2+1}=\dfrac{1}{3}=y_C$ donc C $\notin \mathcal{C}$

$f(0)=\dfrac{1}{0^2+1}=1=y_D$ donc D $\in \mathcal{C}$

$f(1)=\dfrac{1}{1^2+1}=\dfrac{1}{2}\neq y_E$ donc E $\notin \mathcal{C}$

$f(2)=\dfrac{1}{2^2+1}=\dfrac{1}{6}\neq y_F$ donc F $\notin \mathcal{C}$

$\boxed{3}$ $f : x \mapsto 1-x^2$

1°) $f(-3)=1-(-3)^2=1-9=-8$ donc l'ordonnée du point A de $\mathcal{C}$ qui a pour abscisse – 3 est égale à – 8.

2°) On résout l'équation $f(x)=-2$.

$1-x^2=-2$

$-x^2=-3$

$x^2=3$

$x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$

Les ordonnées des points B et C de $\mathcal{C}$ qui ont pour abscisse – 2 sont égales à $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

$\boxed{4}$ $f : x \mapsto (x+3)(x-1)$

1°) $f(0)=(0+3)(0-1)=-3$ donc A(0 ; – 3).

2°) On résout l'équation $f(x)=0$.

$(x+3)(x-1)=0$

$x=-3$ ou $x=1$

B(– 3 ; 0) et C(1 ; 0)

$\boxed{5}$ $f : x \mapsto x^2-1$

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite *D* sont solutions de l'équation $x^2-1=x-1$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$x^2=x$

$x^2-x=0$

$x\times x-x\times 1=0$

$x\times(x-1)=0$

$x=0$ ou $x=1$

Les points d'intersection A et B de $\mathcal{C}$ avec la droite *D* ont pour abscisses respectives 0 et 1.

A $\in D$ donc $y_A=x_A-1=0-1=-1$.

B $\in D$ donc $y_B=x_B-1=1^2-1=0$.

On en déduit que A(0, – 1) et B(1, 0).

$\boxed{6}$ $f : x \mapsto (3x+1)(2x-3)$; $g : x \mapsto -(2x-3)^2$

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' sont solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$(3x+1)(2x-3)=-(2x-3)^2$

$(3x+1)(2x-3)+(2x-3)^2=0$

$(2x-3)\left[(3x+1)+(2x-3)\right]=0$

$(2x-3)(5x-2)=0$

$2x-3=0$ ou $5x-2=0$

$x=\dfrac{3}{2}$ ou $x=\dfrac{2}{5}$

Les points d'intersection A et B de $\mathcal{C}$ avec la droite *D* ont pour abscisses respectives $\dfrac{2}{5}$ et $\dfrac{3}{2}$.

A $\in \mathcal{C}$ ' donc $y_A=-(2x_A-3)^2=-\left(2\times\dfrac{2}{5}-3\right)^2=-\left(\dfrac{4}{5}-3\right)^2=-\left(-\dfrac{11}{5}\right)^2=-\dfrac{121}{25}$.

B $\in \mathcal{C}$ ' donc $y_B=-(2x_B-3)^2=-\left(2\times\dfrac{3}{2}-3\right)^2=-(3-3)^2=0$.

On en déduit que A($\frac{2}{5}$, $-\frac{121}{25}$) et B($\frac{3}{2}$, 0).

$\boxed{7}$ $f : x \mapsto \frac{2x-3}{x+1}$

1°) Déterminons les coordonnées du point d'intersection A de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées.

A ∈ (O*y*) donc $x_A = 0$.

A ∈ $\mathcal{C}$ donc $y_A = \frac{2x_A - 3}{x_A + 1} = \frac{2 \times 0 - 3}{0+1}$.

2°) Déterminons les coordonnées du point d'intersection B de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

On résout l'équation $f(x) = 0$.

(1) est successivement équivalente à :

$\frac{2x-3}{x+1} = 0$

$2x - 3 = 0$

$x = \frac{3}{2}$

On en déduit que B($\frac{3}{2}$, 0).

$\boxed{8}$ $f : x \mapsto (x+2)^2 - 1$

On résout l'équation $f(x) = 0$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$(x+2)^2 - 1^2 = 0$

$[(x+2)+1][(x+2)-1] = 0$

$(x+3)(x+1) = 0$

$x + 3 = 0$ ou $x + 1 = 0$

$x = -3$ ou $x = -1$

On en déduit que A(– 3, 0) et B(– 1, 0).