Chapitre 7 Fonctions associées

Translation ← **Fonctions associées** → **Symétrie centrale**

↑ **Symétrie axiale**

↓ **Autres transformations**

Dans ce chapitre on va s'intéresser aux constructions de courbes.

I. Introduction

1°) Notations

Dans les paragraphes **I** à **V**, f est une fonction dont on suppose connue la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

A partir de f, on définit une seconde fonction g dont l'expression est donnée à partir de f.
On cherche un procédé qui permette de tracer point par point la représentation graphique de g à partir de celle de f sur le même graphique.

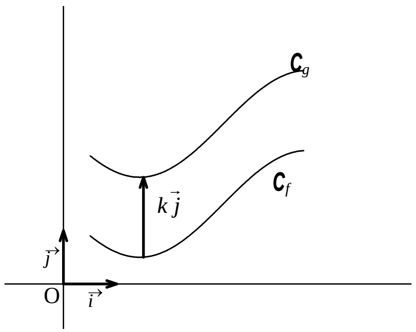
2°) Intérêt

L'intérêt du chapitre est d'arriver à tracer rapidement les courbes de fonctions associées aux fonctions de référence (tracer la représentation graphique de fonctions à partir des courbes des fonctions de référence).

II. Utilisation d'une translation

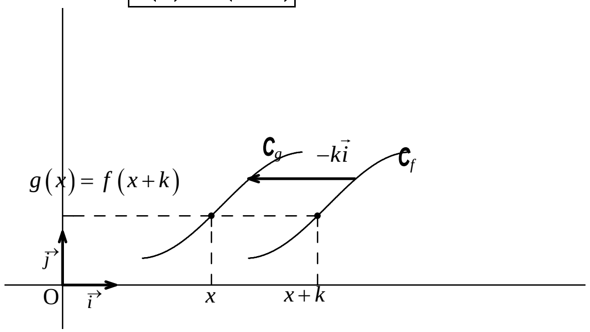
1°) 1er cas : k est un réel fixé.

$$\boxed{g(x) = f(x) + k}$$



2°) 2e cas : k est un réel fixé.

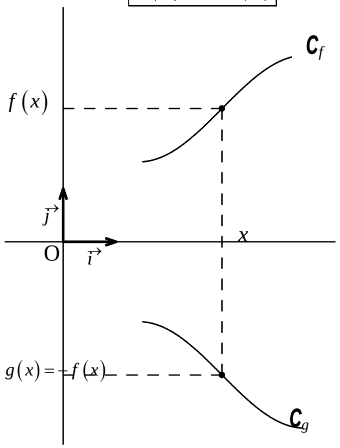
$$\boxed{g(x) = f(x+k)}$$



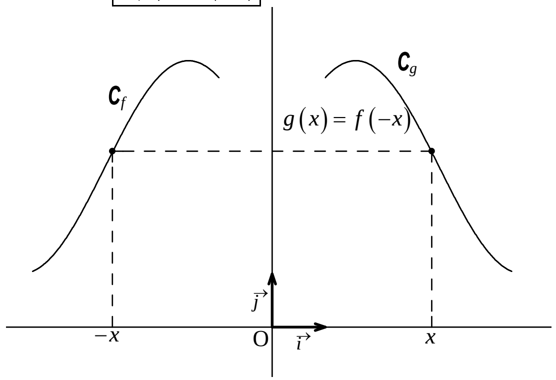
III. Utilisation d'une symétrie axiale

Dans ce paragraphe, le repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est **ORTHOGONAL** $\left((\text{O}x) \perp (\text{O}y)\right)$.

1°) 1er cas : $\boxed{g(x) = -f(x)}$



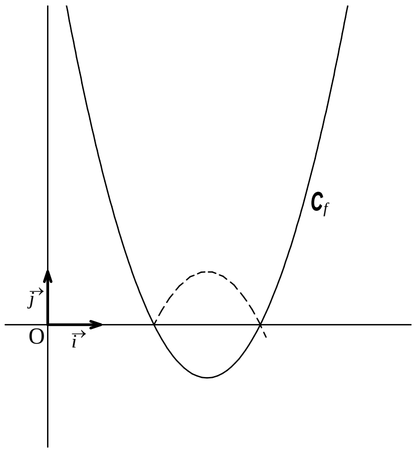
2°) 2e cas : $\boxed{g(x) = f(-x)}$



3°) 3e cas $\boxed{g(x) = |f(x)|}$

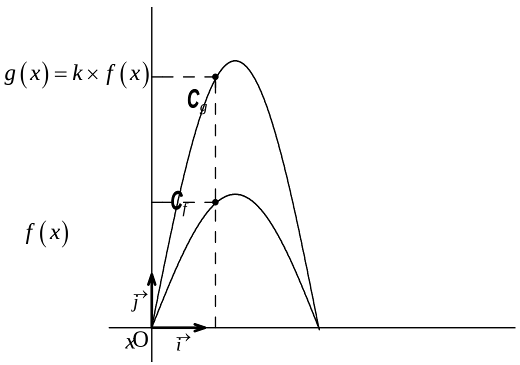
Rappel

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$



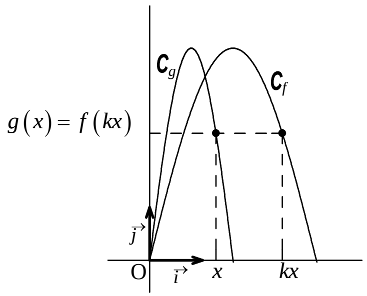
IV. Utilisation d'une dilatation

1°) 1[er] cas : $\boxed{g(x)=k\times f(x)}$



($k=2$ pour la figure)

2°) 2[e] cas : $\boxed{g(x)=f(kx)}$ $(k\neq 0)$



($k=2$ pour la figure)

V. Tableau récapitulatif (règles)

	Fonctions	On passe de $\mathcal{C}_f$ à $\mathcal{C}_g$
L_1	$g(x)=f(x)+k$	par la translation de vecteur $\vec{u}=k\vec{j}$
L_2	$g(x)=f(x+k)$	par la translation de vecteur $\vec{u}=-k\vec{i}$
L_3	$g(x)=f(x-a)+b$	par la translation de vecteur $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$
L_4	$g(x)=-f(x)$	par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses
L_5	$g(x)=f(-x)$	par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées
L_6	$g(x)=\lvert f(x)\rvert$	en conservant la partie de $\mathcal{C}_f$ située au-dessus de l'axe des abscisses et en traçant la symétrique de la partie située au-dessous de l'axe des abscisses
L_7	$g(x)=k\times f(x)$	en multipliant par k les ordonnées des points de $\mathcal{C}_f$
L_8	$g(x)=f(kx)$ $(k\neq 0)$	en divisant par k les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$

$\left.\begin{array}{l} L_4 \\ L_5 \\ L_6 \end{array}\right\}$ dans un repère ORTHOGONAL

N.B. : Le résultat de la ligne L_3 est la conséquence des résultats des lignes L_1 et L_2. En effet, la translation de vecteur $a\vec{i}$ suivie de la translation de vecteur $b\vec{j}$ est égale à la translation de vecteur $a\vec{i}+b\vec{j}$.

VI. Exemples

1°) 1[ère] série

	Fonctions	Courbes
Fonction de base	$f(x)=x^2$	$\mathcal{C}$
Fonctions associées	$f_1(x)=x^2+2$	$\mathcal{C}_1$
	$f_2(x)=x^2-3$	$\mathcal{C}_2$
	$f_3(x)=(x-3)^2$	$\mathcal{C}_3$
	$f_4(x)=(x+1)^2$	$\mathcal{C}_4$
	$f_5(x)=(x-2)^2+1$	$\mathcal{C}_5$
	$f_6(x)=2x^2$	$\mathcal{C}_6$

Comment peut-on obtenir $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$… à partir de $\mathcal{C}$?

Réécriture de la fonction associée à l'aide de la fonction de base	**Déduction graphique**
On observe que $f_1(x)=f(x)+2$	On passe de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}_1$ par la translation de vecteur $\vec{u}=2\vec{j}$.
On observe que $f_2(x)=f(x)-3$	On passe de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}_2$ par la translation de vecteur $\vec{u}=-3\vec{j}$.
On observe que $f_3(x)=f(x-3)$. (« on remplace le x de $f(x)$ par $x-3$ »)	On passe de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}_3$ par la translation de vecteur $\vec{u}=3\vec{i}$.
On observe que $f_4(x)=f(x+1)$.	On passe de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}_4$ par la translation de vecteur $\vec{u}=-\vec{i}$.
On observe que $f_5(x)=f(x-2)+1$.	On passe de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}_5$ par la translation de vecteur $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}$.
On observe que $f_6(x)=2f(x)$.	On passe de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}_6$ en multipliant par 2 les ordonnées de tous les points de $\mathcal{C}$.

2°) 2^e série

	Fonctions	Courbes
Fonction de base	$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\mathcal{C}$
Fonctions associées	$f_1(x)=\dfrac{1}{x}+4$	$\mathcal{C}_1$
	$f_2(x)=\dfrac{1}{x+2}$	$\mathcal{C}_2$
	$f_3(x)=\dfrac{1}{x-3}-1$	$\mathcal{C}_3$

Comment peut-on obtenir $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$… à partir de $\mathcal{C}$?

Réécriture de la fonction associée à l'aide de la fonction de base	**Déduction graphique**
On observe que $f_1(x)=f(x)+4$	On passe de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}_1$ par la translation de vecteur $\vec{u}=4\vec{j}$.
On observe que $f_2(x)=$ inverse de $(x+2)=$ image de $(x+2)$ par $f=f(x+2)$	On passe de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}_2$ par la translation de vecteur $\vec{u}=-2\vec{i}$.
On observe que $f_3(x)=f(x-3)-1$.	On passe de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}_3$ par la translation de vecteur $\vec{u}=3\vec{i}-\vec{j}$.

VII. Principe de tracé par fonctions associées

1°) Généralités

Il s'agit d'un procédé de tracé point par point d'une courbe à partir d'une autre (sans faire de tableau de valeurs).

2°) Méthode

On demande de tracer la courbe d'une fonction que l'on définit par son expression.

Analyse (partie algébrique par calcul)

On définit une fonction de référence (fonction de base parmi $x\mapsto ax+b$, $x\mapsto x^2$, $x\mapsto \dfrac{1}{x}$, $x\mapsto x^3$, $x\mapsto \sqrt{x}$, $x\mapsto |x|$) que l'on met en correspondance avec la fonction proposée.

On explique comment on passe de la courbe de la fonction de référence à celle de la fonction proposée à l'aide des règles que l'on a étudiées.

Tracé (partie géométrique)

On trace la courbe de la fonction de base en pointillés.

Sur le même graphique, on trace la courbe de la fonction demandée.
S'il s'agit d'une translation, on translate quelques points de la premières courbes, sur le même graphique, que l'on joint ensuite d'un trait continu à main levée.

3°) Remarque

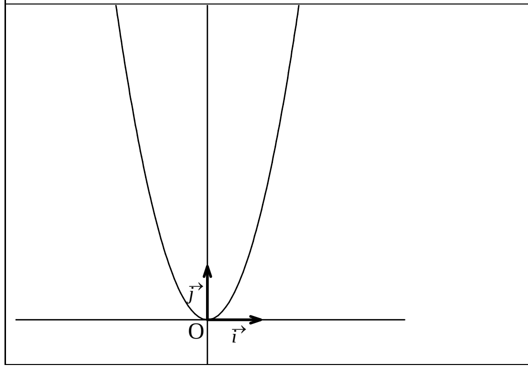
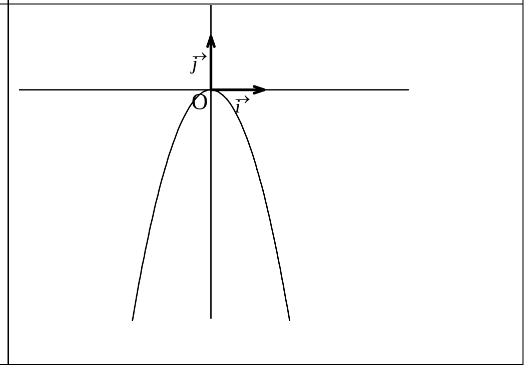
On pourrait utiliser, si l'on en disposait, un appareil qui permet de tracer des translatées de figures ce qui remplacerait le tracé point par point par un tracé mécanique.

VIII. Fonctions associées à la fonction carrée et à la fonction inverse

1°) Fonctions $\boxed{f : x\mapsto ax^2}$ $(a\neq 0)$

Règle

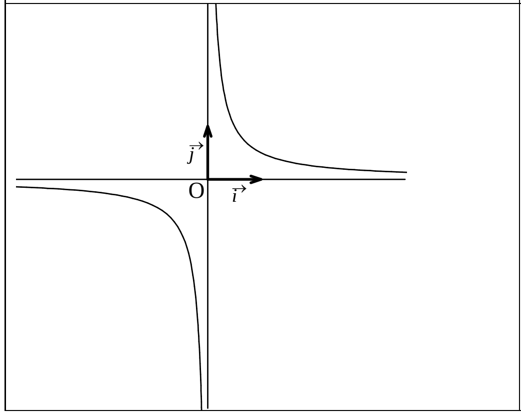
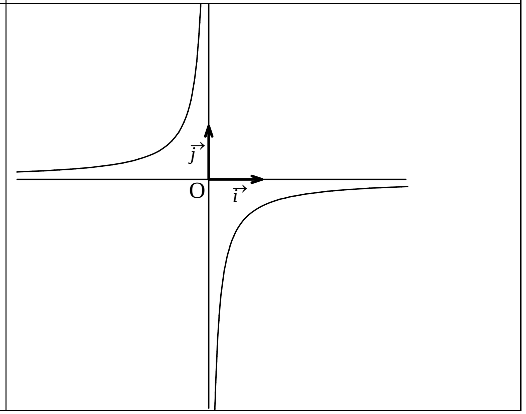
La courbe d'équation $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ est une parabole de sommet O dont la concavité est tournée vers le haut si $a>0$ et vers le bas si $a<0$.

$a>0$	$a<0$
	

2°) Fonction $\boxed{f : x \mapsto \dfrac{a}{x}}$ $(a \neq 0)$

Règle

La courbe d'équation $y = \dfrac{a}{x}$ $(a \neq 0)$ est une hyperbole constituée de deux branches symétriques par rapport à O.

$a > 0$	$a < 0$
	

IX. <u>Appendice : forme canonique d'un polynôme du second degré</u>

1°) Exemple 1

$$f(x) = \underbrace{\boxed{x^2 + 6x} + 5}_{\text{expression développée réduite ordonnée}}$$

Réécriture (2/3 d'identité remarquable : nous avons un terme carré et un terme rectangle ; il manque un terme carré
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$)

$$f(x) = \boxed{x^2 + 6x + 9} - 9 + 5$$

$\downarrow$ Identité remarquable (factorisation)

$$\boxed{f(x) = (x+3)^2 - 4}$$

Forme canonique de $f(x)$ (la variable *x* apparaît à un seul endroit)

Utilisations possibles :

- Factoriser $f(x)$.
- $u : x \mapsto x^2$
  $\mathcal{C}_f = t_{-3\vec{i}-4\vec{j}}(\mathcal{C}_u)$

2°) Exemple 2

$$f(x) = 4x^2 - 8x + 3$$

$$f(x) = 4\underbrace{\left(x^2 - 2x + \frac{3}{4}\right)}$$

On travaille sur ce polynôme.

$$f(x) = 4\left[\boxed{x^2 - 2x + 1} - 1 + \frac{3}{4}\right]$$

$\downarrow$ identité remarquable

$$f(x) = 4\left[(x-1)^2 - \frac{1}{4}\right]$$

$$\boxed{f(x) = 4(x-1)^2 - 1}$$

2°) Règle

Tout polynôme du second degré du type $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ s'écrit sous la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ appelée **« forme canonique »**.

Dans la forme canonique, la variable n'apparaît qu'à un seul endroit.