Prénom : …………………………………… **Nom :** ………………………………………

$1^{\text{ère}}$ S3 **Contrôle (2 h) du jeudi 22 octobre 2009** **Note : …. /20**

L'usage de la calculatrice graphique est autorisé. La présentation des exercices à rédiger doit être très soignée : pas de ratures, tableaux faits à la règle, traits de fraction à la règle, résultats encadrés en rouge à la règle etc.

I. (4 points) Compléter directement sans justifier ni faire de phrases sur cette feuille.

1°) Donner les ensembles de définition des fonctions $f : x \mapsto \sqrt{9-x^2}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-x}$.

……………………………… ………………………………

2°) Les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+1} - 1 + x$ et $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{x+1}$ sont-elles égales ? ………………….

3°) On considère les fonctions $u : x \mapsto \dfrac{2}{x^2+1}$ et $v : x \mapsto 1 - \dfrac{x}{2}$.

Pour tout réel x, on a : $(v \circ u)(x) = $ .... (expression sous la forme d'un seul quotient simplifié).

4°) Déterminer pour quelle valeur de a le nombre –1 est racine de l'équation $-x^3 + ax^2 - x + a + 5 = 0$. $a =$ ....

5°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{4-x^2}$. Déterminer la parité de f. La fonction f est ……………....

6°) Donner les expressions développées réduites de

$\mathrm{A}(x) = (x-2)(2x+3)^2 - (x+2)(2x-3)^2$ et de $\mathrm{B}(x) = (x-1)(x+2)(3x-4) - (x+1)(x-2)(3x+4)$.

$\mathrm{A}(x) = $ .... ; $\mathrm{B}(x) = $ ....

II. (2 points) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-2x)^3$.

1°) Donner sans justifier les expressions de deux fonctions de référence u et v telles que l'on ait $f = v \circ u$.

$u(x) = $ .... ; $v(x) = $ ....

2°) Le but de cette question est de déterminer le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ en utilisant le 1°).

Compléter directement sur cette feuille les phrases ci-dessous.

La fonction u est …………………. sur $\mathbb{R}$.

La fonction v est …………………. sur $\mathbb{R}$.

Donc on en déduit que la fonction f est …………………. sur $\mathbb{R}$.

3°) Donner la forme développée réduite de $f(x)$ (calculs au brouillon).

$f(x) = $ ....

III. (1 point) Déterminer les variations de la fonction $f : x \mapsto -2x^2 + 1$ en utilisant le sens de variation d'<u>une seule</u> fonction de référence et les règles concernant les opérations algébriques (aucune autre méthode n'est acceptée). Donner la fonction la fonction de référence, expliquer brièvement mais clairement la démarche puis donner le tableau de variation de *f* avec la valeur de l'extremum (on ne demande pas de démontrer que *f* admet un extremum).

………

………

………

………

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Variation de *f*	

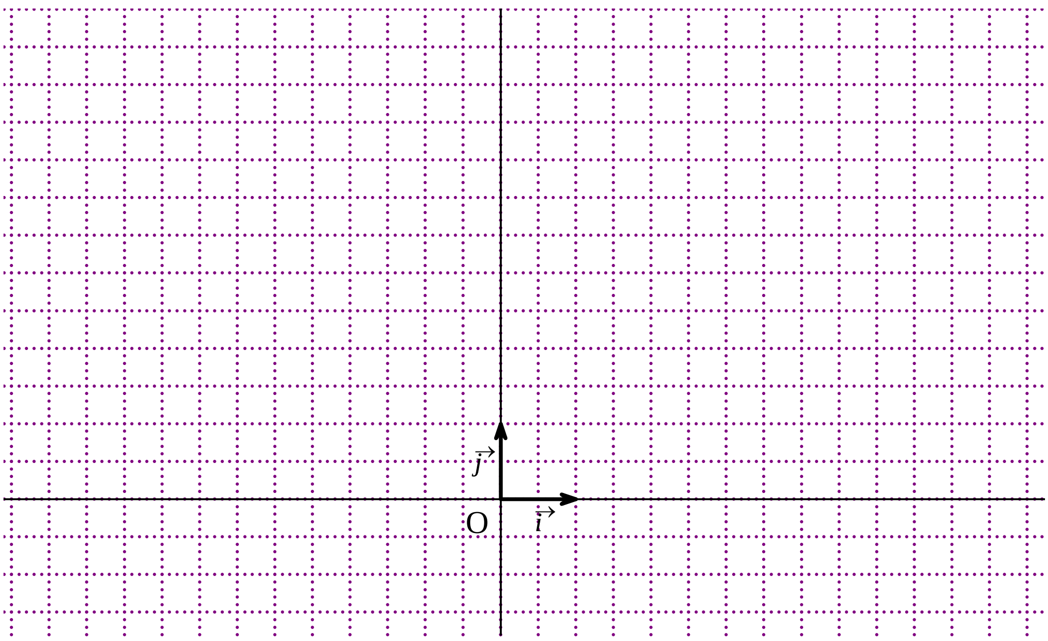
IV. (3 points) On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x + 3$. On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Donner sans justifier la forme canonique de $f\left(x\right)$; en déduire que la courbe $\mathcal{C}$ peut être obtenue à partir de la courbe représentative d'une fonction de référence.

$f\left(x\right) =$ ....

$\mathcal{C}$ est l'image de la courbe d'équation $y =$ .... par …………………………………………………..

2°) Tracer avec soin sur le graphique ci-dessous la courbe de la fonction de référence en pointillés puis la courbe $\mathcal{C}$ en trait continu.



3°) On considère la fonction $g : x \mapsto x^2 - 4\left| x \right| + 3$. On note Γ sa représentation graphique.
Etudier rigoureusement la parité de *g* (on conclura ainsi : « *La fonction g est ………* »).
Que peut-on en déduire pour Γ ? Tracer en rouge Γ sur le graphique ci-dessus.

……

……

……

……

……

V. (4 points) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Démontrer que, pour tout réel $x \neq -1$, on a : $f(x)=1-\dfrac{1}{x+1}$.

……

……

……

……

……

2°) Le but de cette question est de déterminer les variations de la fonction f.

A l'aide du résultat du 1°), déterminer sans justifier les expressions de trois fonctions u, v, w de référence telles que $f = w \circ v \circ u$.

$u(x)=$................ ; $v(x)=$................ ; $w(x)=$...............

Compléter les phrases suivantes exprimant les variations de u, v, w.

La fonction u est …………………. sur …………………….. .

La fonction v est …………………. sur …………………….. .

La fonction w est …………………. sur …………………….. .

Compléter le tableau de « variations enchaînées » ci-dessous et faire les schémas avec les intervalles.
Faire les flèches des variations à la règle.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Variation de u	
Variations de $v \circ u$	
Variations de $w \circ v \circ u$	

3°) Soit Δ la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Etudier par le calcul la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ.

Présenter convenablement le calcul algébrique (avec des notations rigoureuses) ; présenter l'étude finale dans un tableau.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

x	$-\infty$ $+\infty$

VI. (4 points) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right)=3-\left(x-1\right)^{2}$.

1°) Démontrer que f admet un extremum sur $\mathbb{R}$.

On conclura ainsi : « Le ………… de f sur $\mathbb{R}$ est égal à ; il est obtenu pour $x=$.......... ».

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

2°) Le but de cette question est de déterminer les variations de la fonction f.
Déterminer sans justifier les expressions de trois fonctions u, v, w de référence telles que $f = w \circ v \circ u$.

$u\left(x\right)=$................ ; $v\left(x\right)=$................ ; $w\left(x\right)=$...............

Compléter les phrases suivantes exprimant les variations de u, v, w.

La fonction u est …………………. sur …………………………….. .

La fonction v est …………………. sur …………………….. .

La fonction w est …………………. sur …………………….. .

Compléter le tableau de « variations enchaînées » ci-dessous et faire les schémas avec les intervalles.
Faire les flèches des variations à la règle. On fera figurer les valeurs des extremums.

x	$-\infty$ $+\infty$
Variation de u	
Variations de $v \circ u$	
Variations de $w \circ v \circ u$	

Retrouver ainsi le résultat du 1°).

………

VII. (2 points) Les longueurs sont exprimées en centimètres.
On désire imprimer une carte carrée de côté *x*.
On souhaite cependant laisser une marge de 2 cm en haut et en bas de la carte et de 1 cm à gauche et à droite.
(On retire cependant une marge de 2 cm en haut et en bas de la carte et de 1 cm à gauche et à droite).
1°) On suppose que $x = 6$. Quelle est l'aire de la surface imprimable ? Donner la réponse sans justifier.
2°) Déterminer *x* pour que l'aire de la surface imprimable soit égale à 14 cm^2.